DESCRIÇÃO ESPACIAL

POSIÇÃO

ORIENTAÇÃO

CONTEÚDO

DESCRIÇÃO ESPACIAL

- Representação de posição;
- Representação de orientação;
- Representação de "frame";
- Ângulos de Euler;
- Equivalência ângulo eixo.

Atividade de Pesquisa: <u>**Controle Remoto**</u>

⇒**Definição;**

⇒**Elementos Constituintes;**

⇒**Transmissão e Recepção;**

⇒**Circuitos de Acionamento e Controle;**

⇒**Aplicação em Robótica.**

DESCRIÇÃO ESPACIAL

INTRODUÇÃO

- Pela própria definição de robôs manipuladores, torna-se evidente a necessidade de se representar Posições e Orientações das partes, de ferramentas e do próprio manipulador.
- Para definir e manipular matematicamente tais quantidades é necessário definir um sistema de coordenadas e adotar uma convenção para representá-las.
- Adotaremos um sistema universal de coordenadas, no qual qualquer coisa pode ser referenciada, uma vez que o próprio sistema cartesiano é referido à ele.

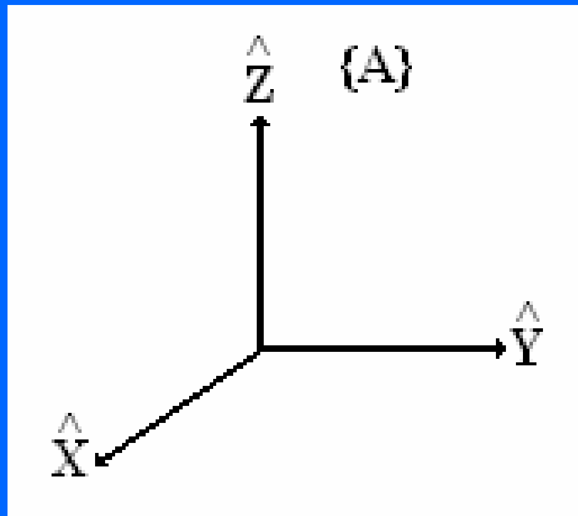
DESCRIÇÃO ESPACIAL

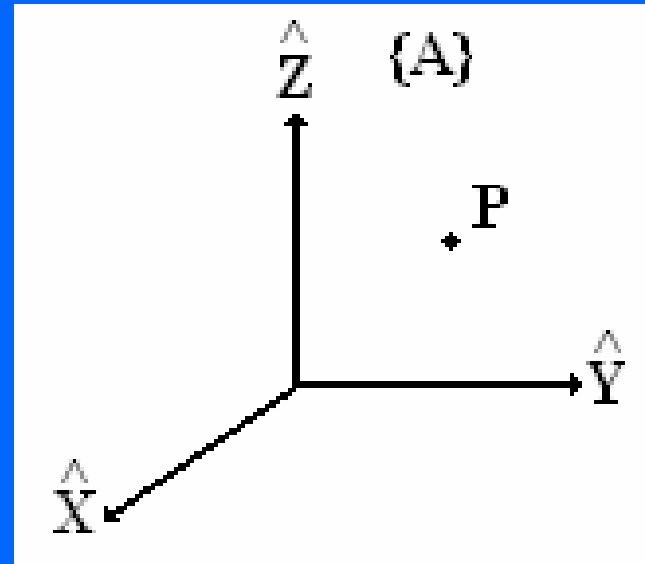
REPRESENTAÇÃO DE POSIÇÃO

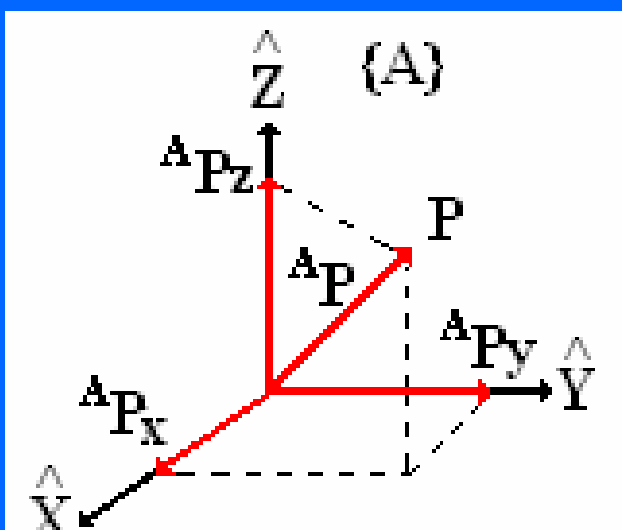
- Um ponto no espaço tridimensional pode ser localizado por um vetor.
- O vetor deverá conter informações sobre qual sistema de coordenadas ele está definido.
- O sistema ao qual o vetor está referido será representado por uma letra maiúscula entre chaves. $\{A\}$
- O vetor será representado por uma letra maiúscula com um sobrescrito à esquerda para indicar o sistema onde estar referido. ${}^{A}P$

DESCRIÇÃO ESPACIAL

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$







$${}^{A}P = \begin{bmatrix} {}^{A}P_x \\ {}^{A}P_y \\ {}^{A}P_z \end{bmatrix}$$

DESCRIÇÃO ESPACIAL

REPRESENTAÇÃO DE ORIENTAÇÃO

- Algumas vezes temos a necessidade não apenas de representar um ponto no espaço, mas também de descrever a orientação de um corpo no espaço.
- A posição de um ponto é descrita através de um vetor posição, enquanto que a orientação de um corpo é descrita por um sistema de coordenadas situado no próprio corpo.
- Uma maneira de descrever o corpo é descrever o seu sistema associado em termos de um sistema de referência.

DESCRIÇÃO ESPACIAL

– Os vetores unitários de {B} são: X_B; Y_B e Z_B.

– Esses vetores escritos no sistema de referência {A} são: ${}^{A}X_B$; ${}^{A}Y_B$ e ${}^{A}Z_B$.

– ${}^{A}X_B$ lê-se Coordenada X do sistema {B} escrita no sistema {A}.

– Cada vetor de {B} deve ser escrito no sistema {A}, portanto cada elemento de {B} terá 3 componentes em {A}:

$$\mathbf{{}^{A}X_B = [{}^{A}X_{BX} \quad {}^{A}Y_{BX} \quad {}^{A}Z_{BX}]^T}$$

DESCRIÇÃO ESPACIAL

– Se tomarmos uma matriz, onde as colunas sejam os vetores ${}^{A}X_{B}$, ${}^{A}Y_{B}$ e ${}^{A}Z_{B}$ na forma:

$$[{}^{A}\mathbf{X}_{\mathbf{B}} \quad {}^{A}\mathbf{Y}_{\mathbf{B}} \quad {}^{A}\mathbf{Z}_{\mathbf{B}}]$$

– Onde

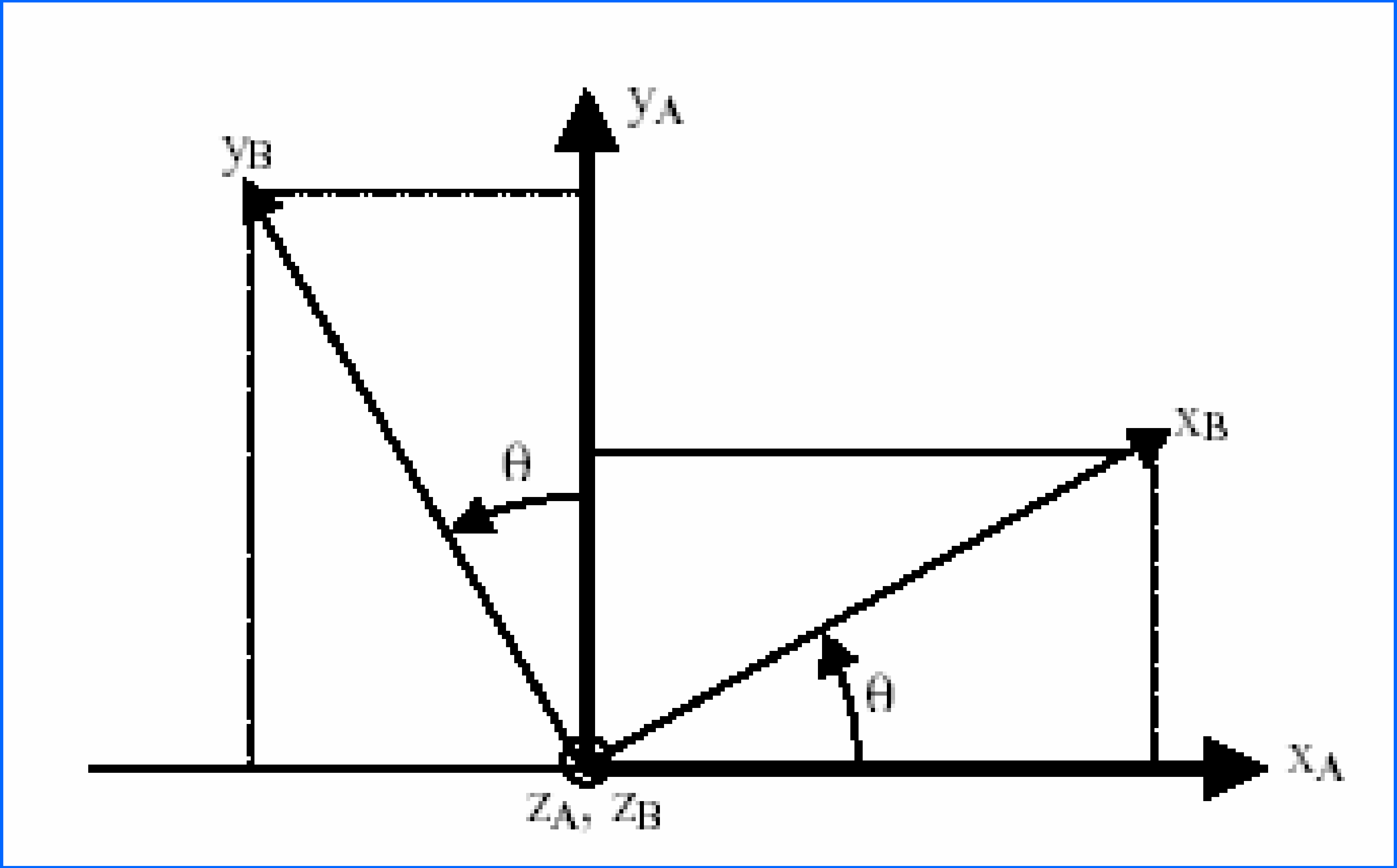
$${}^{A}\mathbf{X}_{\mathbf{B}} = [{}^{A}\mathbf{X}_{\mathbf{BX}} \quad {}^{A}\mathbf{Y}_{\mathbf{BX}} \quad {}^{A}\mathbf{Z}_{\mathbf{BX}}]^{\mathbf{T}}$$

– Essa matriz será chamada de MATRIZ DE ROTAÇÃO e descreverá o corpo {B} no sistema de referência {A}.

– A matriz de rotação é denotada como ${}^{A}R_{B}$

$${}^{A}\mathbf{R}_{\mathbf{B}} = [{}^{A}\mathbf{X}_{\mathbf{B}} \quad {}^{A}\mathbf{Y}_{\mathbf{B}} \quad {}^{A}\mathbf{Z}_{\mathbf{B}}]$$

DESCRIÇÃO ESPACIAL



DESCRIÇÃO ESPACIAL

REPRESENTAÇÃO DE “FRAME”

- É um conjunto de 4 vetores que fornece informações sobre a posição e a orientação de um corpo.
- Para especificar completamente a localização de um manipulador é necessário informar a posição e a sua orientação.
- Por conveniência, o ponto, cuja posição será representada, será a origem do sistema de coordenadas associado ao corpo.
- Portanto, a representação de um frame pode ser expressa através de um vetor e uma matriz.

DESCRIÇÃO ESPACIAL

– Um frame é tratado como um sistema de coordenadas que, além da orientação, dá o vetor posição da sua origem em relação a outro frame.

$$\{\mathbf{B}\} = \{{}^{A}\mathbf{R}_{B}\ ;\ {}^{A}\mathbf{P}_{B}\}$$

– Posições poderiam ser representadas por frames onde a matriz de rotação é a matriz identidade.

– A orientação poderia ser expressa por um frame onde o vetor posição é nulo.

– Um vetor que parte da origem de um frame para a origem de outro é a representação da posição deste em relação ao primeiro.

DESCRIÇÃO ESPACIAL

REPRESENTAÇÃO DE FRAME PARA FRAME

– Quando 2 frames têm a mesma orientação, porém origens diferentes, podemos representar um ponto de {B} em {A} se conhecemos ${}^{B}P$ e ${}^{A}P_{B}$ através de:

$$\mathbf{{}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{B}} \qquad \text{(Translação)}$$

Ex: considere 2 referenciais {A} e {B} com mesma orientação, porém a origem de {B} está a 5 unidades da origem de {A} ao longo do eixo x_A. Considere o ponto P definido em {B} como ${}^{B}P = [2\ 2\ 1]^T$. Determine {B} em {A} e P em {A}.

${}^{B}P = [2\ 2\ 1]^T$ ${}^{A}P_{B} = [5\ 0\ 0]^T$ $\mathbf{{}^{A}P = [7\ \ 2\ \ 1]^T}$

DESCRIÇÃO ESPACIAL

– Quando 2 frames têm a mesma origem, porém orientações diferentes, podemos representar um ponto de {B} em {A} se conhecemos ${}^{B}P$ e ${}^{A}R_{B}$ através de:

$$\mathbf{{}^{A}P = {}^{A}R_{B}\ {}^{B}P} \qquad \text{(Rotação)}$$

Ex: Um corpo {B} está rotacionado em relação a referência {A} de um ângulo de 30^{o} sobre o eixo z. O eixo z é o vetor que sai do plano da página. Escreva os vetores unitários de {B} em {A} e ${}^{A}R_{B}$.

${}^{B}P = [\ 0\ \ 2\ \ 0\ ]^{T}$ $\qquad$ $\mathbf{{}^{A}P = [\ -1.000\ \ 1.732\ \ 0\ ]^{T}}$

DESCRIÇÃO ESPACIAL

– Quando 2 frames têm origens e orientações diferentes, podemos representar um ponto de {B} em {A} desde que conheçamos a origem de {B} em relação a {A}, isto é, ${}^{A}P_{B}$ e também sua orientação ${}^{A}R_{B}$ através de:

$$\mathbf{{}^{A}P = {}^{A}R_{B}\,{}^{B}P + {}^{A}P_{B}}$$

Ex: Um corpo {B} está rotacionado em relação a referência {A} de um ângulo de 30º sobre o eixo z e está 10 unidades a frente em x e 5 em y. Encontrar ${}^{A}P$ onde ${}^{B}P = [\ 3.0\ \ 7.0\ \ 0\ ]^{T}$

$$\mathbf{{}^{A}P = [9.098\ \ 12.562\ \ 0.0]^{T}}$$

DESCRIÇÃO ESPACIAL

ÂNGULOS DE EULER

- É a rotação do frame em torno dos eixos principais, porém mantendo a mesma origem.
- A representação de {B} em {A} é dada por:

$$\mathbf{R_{zyx}(\alpha, \beta, \gamma) = R(z,\alpha)\ R(y,\beta)\ R(x,\gamma)}$$

Dada uma matriz de rotação é possível obter os ângulos de Euler ZYX. Também conhecidos como ângulos de Roll, Pitch e Yaw.

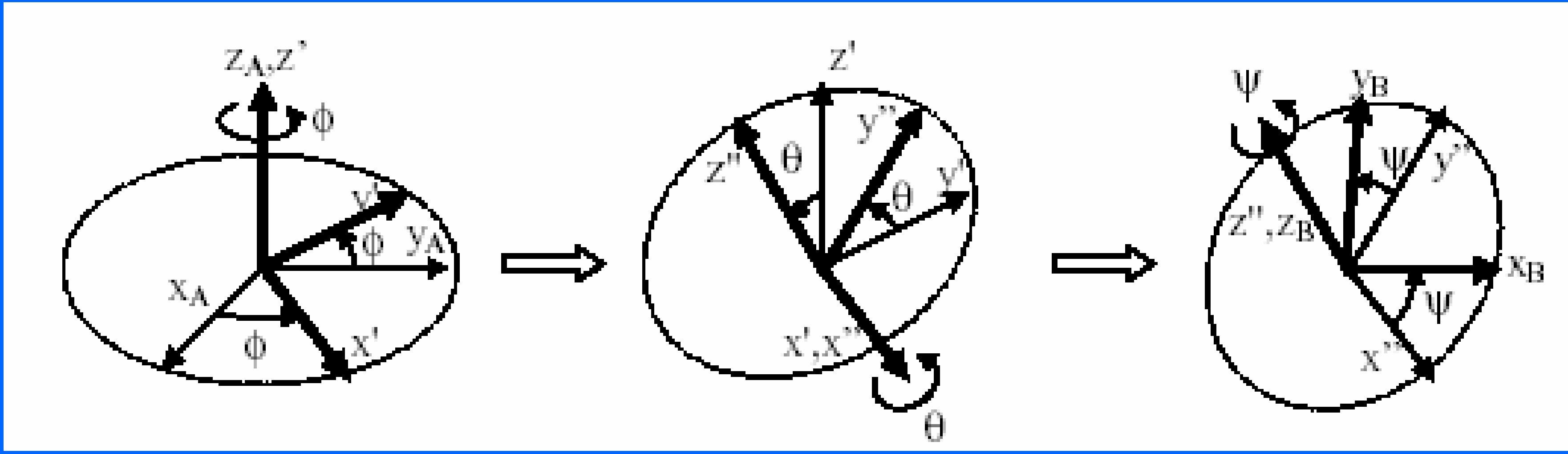
$$\alpha = \mathrm{atan2}(r_{21}, r_{11})$$

$$\beta = \mathrm{atan2}[-r_{31}, (r^2_{32} + r^2_{33})^{1/2}]$$

$$\gamma = \mathrm{atan2}(r_{32}, r_{33})$$

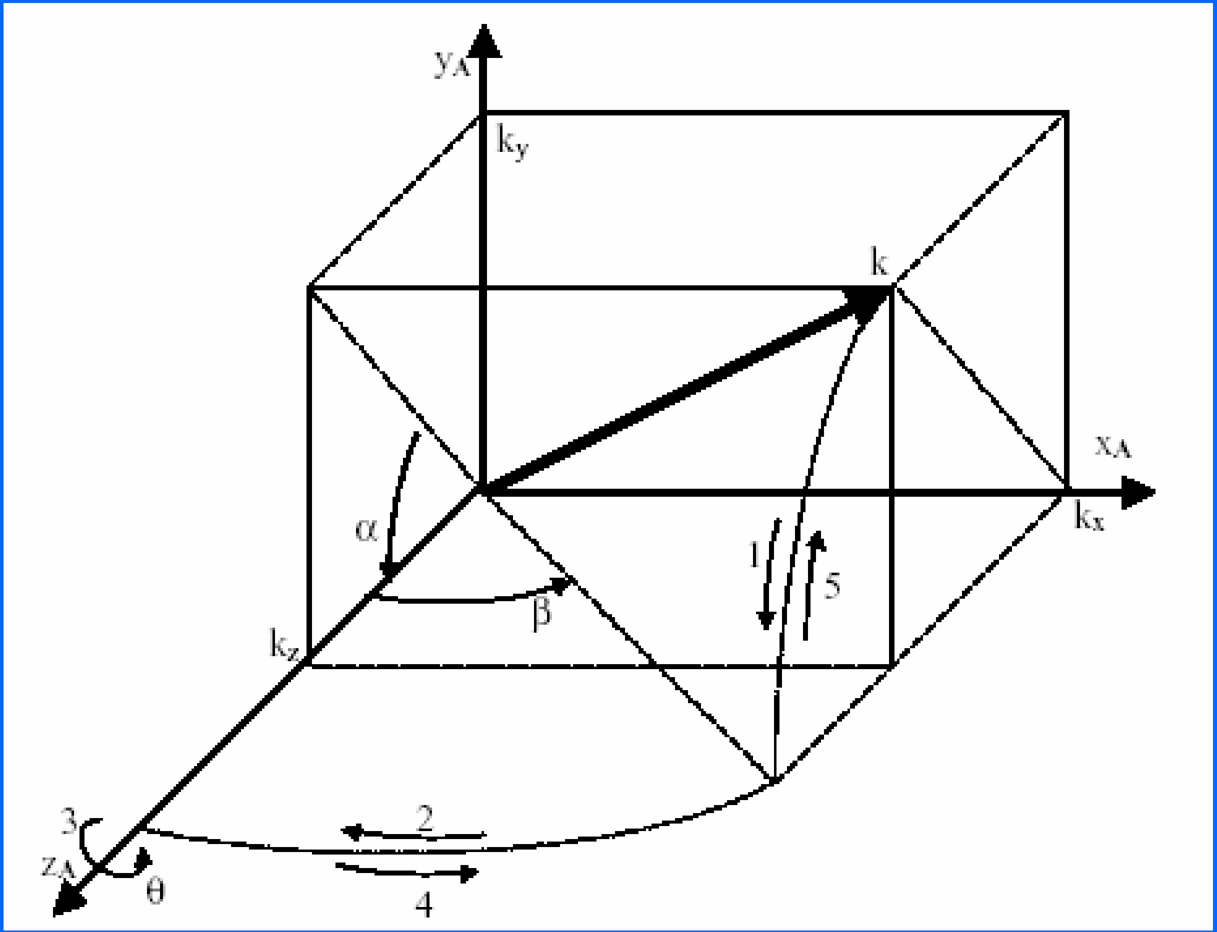
DESCRIÇÃO ESPACIAL

ÂNGULOS DE EULER



DESCRIÇÃO ESPACIAL

EQUIVALÊNCIA ÂNGULO EIXO



DESCRIÇÃO ESPACIAL

EQUIVALÊNCIA ÂNGULO EIXO

$$R_{k\theta} = \begin{bmatrix} (k_x^2.v\theta+c\theta) & (k_x.k_y.v\theta-k_z.s\theta) & (k_x.k_z.v\theta+k_y.s\theta) \\ (k_x.k_y.v\theta+k_z.s\theta) & (k_y^2.v\theta+c\theta) & (k_y.k_z.v\theta-k_x.s\theta) \\ (k_x.k_z.v\theta-k_y.s\theta) & (k_y.k_z.v\theta+k_x.s\theta) & (k_z^2.v\theta+c\theta) \end{bmatrix}$$

$$\theta = \cos^{-1}((R_{11}+R_{22}+R_{33}-1)/2)$$

$$k_x = (R_{32}-R_{23})/(2.s\theta)$$
$$k_y = (R_{13}-R_{31})/(2.s\theta)$$
$$k_z = (R_{21}-R_{12})/(2.s\theta)$$