

2. CINEMÁTICA

2.1. Representação de Posição e Orientação:

Sistemas Referenciais:

- Para localizar um corpo rígido no espaço tridimensional, um sistema referencial é associado ao mesmo.
- Um referencial associado a um corpo rígido é fixo no mesmo.
- Qualquer ponto do corpo rígido possuirá coordenadas invariantes no seu referencial associado.
- referencial será identificado por uma letra entre chaves. Exemplo: {A}, {i}, etc.
- Os referenciais são definidos por três vetores unitários ortogonais: \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} .

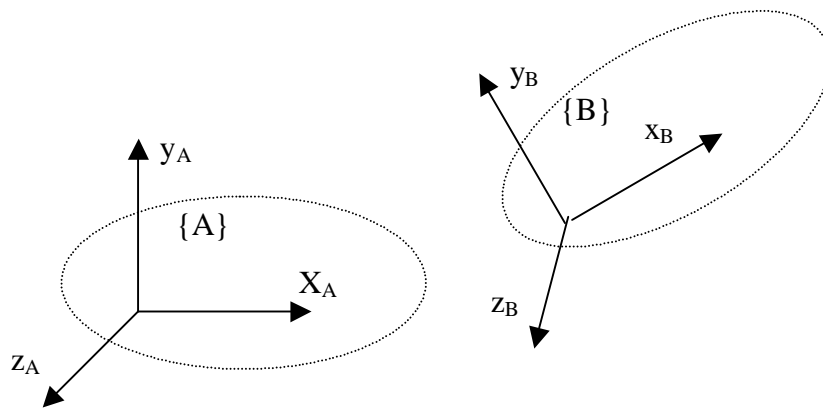


Figura 2.1. Representação da localização de corpos rígidos por meio de referenciais.

Localização de um Corpo Rígido em relação a um Referencial:

- A localização de um corpo rígido B em relação a um referencial qualquer {A} é definida pela localização do seu referencial associado {B} em relação a {A}.
- A localização de {B} em relação a {A} é completamente definida especificando:
 - a posição de {B} em relação a {A}
 - a orientação dos eixos de {B} em relação a os eixos de {A}.

Representação de posição de {B} em relação a {A}:

A posição de {B} em relação a {A} é definida pelo vetor de posição ${}^A P_B$ ligando a origem de {A} à origem de {B}, expresso em coordenadas de {A}:

$${}^A P_B = [{}^A p_{Bx} \quad {}^A p_{By} \quad {}^A p_{Bz}]^T$$

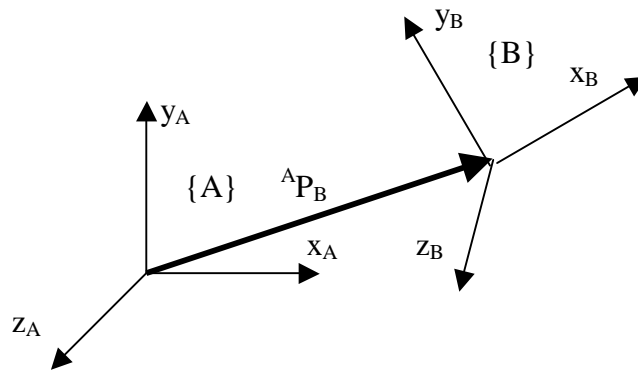


Figura 2.2. Posição de um referencial {B} em relação a um referencial {A}.

Exemplo: considere dois referenciais {A} e {B} com a mesma orientação, com a origem de {B} localizada a 5 unidades ao longo do eixo x_A . Considere um ponto P, expresso em {B} como ${}^B P = [2 \ 2 \ 1]^T$. Determine a posição de {B} em relação a {A} bem como a representação do ponto P em {A}.

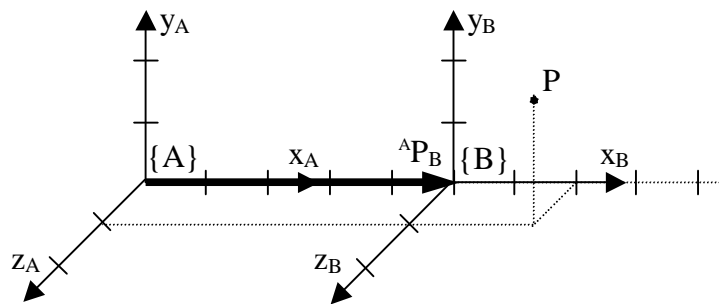


Figura 2.3. Posição em um referencial {B} transladado ao longo do eixo x_A de {A}.

Solução: A origem de {B} está localizada no ponto (5, 0, 0) em coordenadas de {A}, portanto, a posição de {B} em relação a {A} é dada por:

$${}^A P_B = [5 \ 0 \ 0]^T$$

Como os dois referenciais possuem a mesma orientação:

$${}^A P = {}^A P_B + {}^B P = [5 \ 0 \ 0]^T + [2 \ 2 \ 1]^T = [7 \ 2 \ 1]^T$$

Representação de orientação de {B} em relação a {A}:

A orientação de {B} em relação a {A} é definida pela matriz de rotação ${}^A R_B$ de dimensão 3x3, ortogonal, cujos vetores colunas são os eixos unitários de {B} expressos em coordenadas de {A}:

$${}^A R_B = [{}^A x_B \quad {}^A y_B \quad {}^A z_B]$$

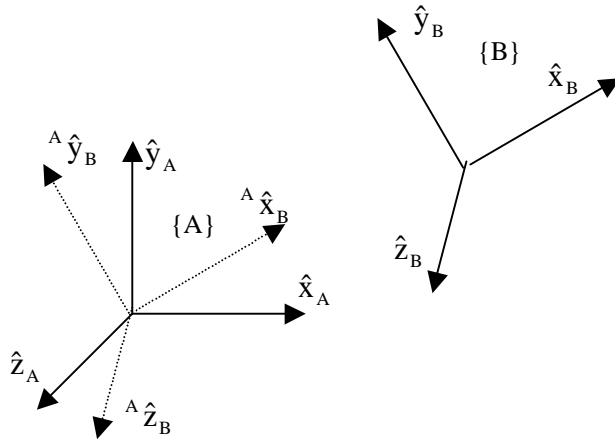


Figura 2.4. Orientação de um referencial {B} em relação a um referencial {A}.

A matriz ${}^A R_B$ é uma representação redundante de orientação, visto que possui nove elementos que satisfazem a seis restrições (os três eixos são unitários e ortogonais):

$$\begin{aligned} ({}^A X_B)^T \cdot {}^A X_B &= 1 & ({}^A Y_B)^T \cdot {}^A Y_B &= 1 & ({}^A Z_B)^T \cdot {}^A Z_B &= 1 \\ ({}^A X_B)^T \cdot {}^A Y_B &= 0 & ({}^A Y_B)^T \cdot {}^A Z_B &= 0 & ({}^A Z_B)^T \cdot {}^A X_B &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz ${}^A R_B$ é ortogonal, ou seja:

$$({}^A R_B)^{-1} = ({}^A R_B)^T$$

Se dois referenciais {A} e {B} possuem a mesma origem, um ponto P é expresso nos referenciais {A} e {B} respectivamente como:

$${}^A P = [{}^A p_x \quad {}^A p_y \quad {}^A p_z]^T \quad {}^B P = [{}^B p_x \quad {}^B p_y \quad {}^B p_z]^T$$

Conhecendo a representação de P em {B}, ${}^B P$, bem como a representação dos eixos de {B} em {A}, é possível encontrar a representação de P em {A}, ${}^A P$:

$${}^A P = [{}^B X_A^T \cdot {}^B P \quad {}^B Y_A^T \cdot {}^B P \quad {}^B Z_A^T \cdot {}^B P]^T = [{}^B X_A \quad {}^B Y_A \quad {}^B Z_A]^T \cdot {}^B P \Rightarrow {}^A P = {}^B R_A^T \cdot {}^B P = {}^A R_B \cdot {}^B P$$

De forma equivalente, ${}^B P = {}^B R_A \cdot {}^A P$, portanto:

$${}^A P = {}^A R_B \cdot {}^B P = {}^A R_B \cdot {}^B R_A \cdot {}^A P \Rightarrow {}^A R_B \cdot {}^B R_A = I \Rightarrow {}^B R_A = ({}^A R_B)^{-1} = ({}^A R_B)^T$$

Dados três referenciais {A}, {B} e {C} com origens coincidentes, temos:

$${}^A P = {}^A R_B \cdot {}^B P, \quad {}^B P = {}^B R_C \cdot {}^C P, \quad {}^A P = {}^A R_C \cdot {}^C P \Rightarrow {}^A P = {}^A R_B \cdot {}^B R_C \cdot {}^C P \Rightarrow {}^A R_C = {}^A R_B \cdot {}^B R_C$$

A matriz ${}^A R_B$ pode ser representada então como ${}^A R_B = {}^A R_C \cdot {}^C R_B = ({}^C R_A)^T \cdot {}^C R_B$. Assim:

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} ({}^C X_A)^T \cdot {}^C X_B & ({}^C X_A)^T \cdot {}^C Y_B & ({}^C X_A)^T \cdot {}^C Z_B \\ ({}^C Y_A)^T \cdot {}^C X_B & ({}^C Y_A)^T \cdot {}^C Y_B & ({}^C Y_A)^T \cdot {}^C Z_B \\ ({}^C Z_A)^T \cdot {}^C X_B & ({}^C Z_A)^T \cdot {}^C Y_B & ({}^C Z_A)^T \cdot {}^C Z_B \end{bmatrix}$$

Note que cada elemento da matriz é representado pelo produto interno entre um eixo unitário de {A} e um eixo unitário de {B}, sendo portanto igual ao cosseno do ângulo entre eles. Por esta razão, a matriz de rotação ${}^A R_B$ é também chamada de Matriz de Cossenos Diretores. Os valores dos cossenos diretores são independentes da escolha do referencial {C}.

Exemplo: considere dois referenciais coincidentes, {A} e {B}. Suponha que {B} gira um ângulo θ em torno do eixo ${}^A z_B$. Encontre a matriz de rotação ${}^A R_B = R(z, \theta)$:

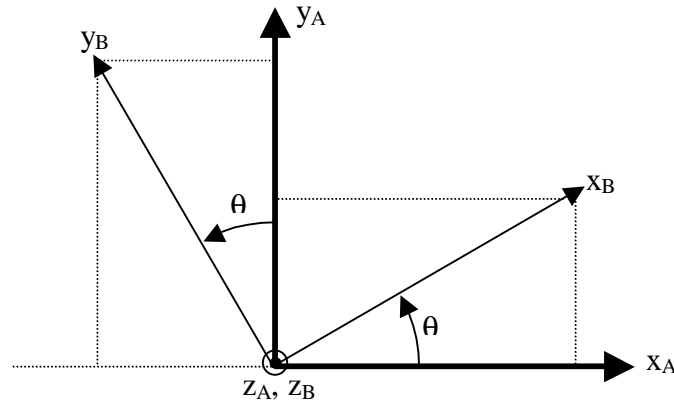


Figura 2.5. Rotação em torno do eixo z_A .

Da figura acima, através de simples relações trigonométricas, temos:

$${}^A x_B = [\cos(\theta) \quad \text{sen}(\theta) \quad 0]^T \quad {}^A y_B = [-\text{sen}(\theta) \quad \cos(\theta) \quad 0]^T \quad {}^A z_B = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$\Rightarrow {}^A R_B = R(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De forma análoga, para rotações em torno dos eixos x_A e y_A , temos respectivamente:

$$\Rightarrow {}^A R_B = R(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^A R_B = R(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Exemplo: considere dois referenciais coincidentes, {A} e {B}. Suponha que {B} gira um ângulo θ em torno do eixo ${}^A z_B$. Considere um ponto P expresso em coordenadas de {B}, ${}^B P$. Encontre a representação do ponto P em coordenadas de {A}, ${}^A P$:

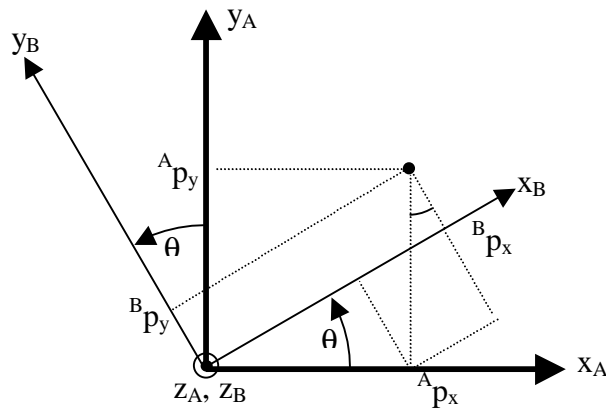


Figura 2.6. Rotação de um ponto em torno do eixo z_A .

Da figura acima, através de relações trigonométricas simples, temos:

$${}^B p_x = {}^A p_x \cdot \cos(\theta) + {}^A p_y \cdot \sin(\theta) \quad {}^B p_y = {}^A p_y \cdot \cos(\theta) - {}^A p_x \cdot \sin(\theta) \quad {}^B p_z = {}^A p_z$$

Resolvendo para ${}^A p_x$, ${}^A p_y$, ${}^A p_z$:

$${}^A p_x = {}^B p_x \cdot \cos(\theta) - {}^B p_y \cdot \sin(\theta) \quad {}^A p_y = {}^B p_x \cdot \sin(\theta) + {}^B p_y \cdot \cos(\theta) \quad {}^A p_z = {}^B p_z$$

Que em notação matricial, como era de esperar, corresponde a:

$$\begin{bmatrix} {}^A p_x \\ {}^A p_y \\ {}^A p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^B p_x \\ {}^B p_y \\ {}^B p_z \end{bmatrix} \Rightarrow {}^A P = R(z, \theta) \cdot {}^B P$$

Outras representações de orientação:

A matriz de orientação ${}^A R_B$ representa a orientação de $\{B\}$ em relação a $\{A\}$ de modo redundante, visto que seus nove elementos possuem seis relações de dependência (as colunas de ${}^A R_B$ são vetores unitários e perpendiculares entre si). Assim, de forma análoga à especificação de posição, três parâmetros independentes são suficientes para especificar orientação no espaço tridimensional. Existem vários esquemas e convenções utilizados para fazer esta especificação. A seguir, apresentaremos alguns deles.

Ângulos de Euler ZXZ:

Neste esquema, a orientação de $\{B\}$ em relação a $\{A\}$ é representada por três ângulos de rotação (ϕ , θ , ψ), exercutados nessa ordem, respectivamente, em torno dos eixos z, x e z de um referencial móvel, inicialmente coincidente com $\{A\}$ e alinhado com $\{B\}$ após as três rotações. A matriz de rotação equivalente a (ϕ , θ , ψ) é dada por:

$$R_{\phi\theta\psi} = R(z, \phi) \cdot R(x, \theta) \cdot R(z, \psi)$$

Definimos a seguinte nomenclatura: $\sin(\theta) = s\theta$, $\cos(\theta) = c\theta$. Assim:

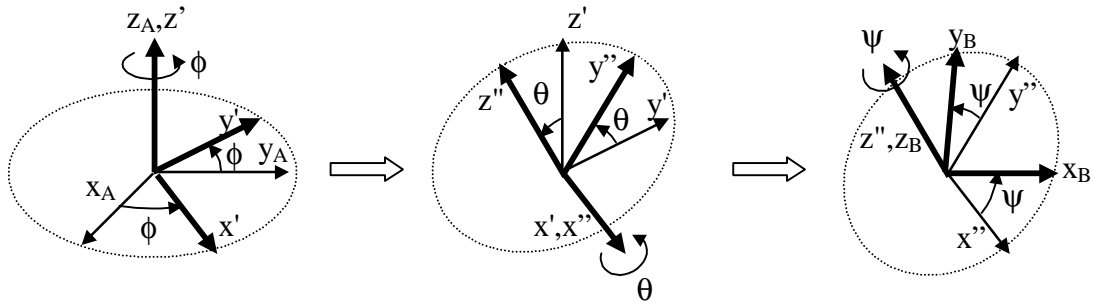


Figura 2.7. Ângulos de Euler ZYZ.

$$R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} (c\phi.c\psi - s\phi.c\theta.s\psi) & (-c\phi.s\psi - s\phi.c\theta.c\psi) & (s\phi.s\theta) \\ (s\phi.c\psi + c\phi.c\theta.s\psi) & (-s\phi.s\psi + c\phi.c\theta.c\psi) & (-c\phi.s\theta) \\ (s\theta.s\psi) & (s\theta.c\psi) & (c\theta) \end{bmatrix}$$

Conhecendo-se a representação da orientação na forma de uma matriz de rotação $R_{\phi\theta\psi}$, é possível encontrar os ângulos de Euler ZYZ a partir de relações entre os seus elementos. Para evitar ambigüidades, utilizaremos a função arco-tangente definida nos quatro quadrantes, $\text{atan2}(a, b) = \arg(a + j.b) = \text{argumento do número complexo } a + j.b$, de tal modo que $\theta = \text{atan2}(\text{sen}(\theta), \text{cos}(\theta)) = \text{atan2}(k.\text{sen}(\theta), k.\text{cos}(\theta))$, com $k > 0$. Assim:

$$\phi = \text{atan2}(R_{13}, -R_{23}) \quad \theta = \text{atan2}(\pm[R_{31}^2 + R_{32}^2]^{1/2}, R_{33}) \quad \psi = \text{atan2}(R_{31}, R_{32})$$

Verifica-se que a solução para os ângulos de Euler não é única. Existem dois conjuntos de ângulos possíveis dependendo do sinal da raiz quadrada. Tomando o sinal positivo, o que equivale a limitar θ ao intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, eliminamos esta ambigüidade. Verifica-se também que, para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, a solução degenera (ocorre uma divisão por zero), o que resulta em infinitas soluções. Isto ocorre porque as rotações ϕ e ψ ocorrem em torno do mesmo eixo espacial e o angulo resultante da soma destes ângulos pode ser obtido de infinitos pares (ϕ, ψ) diferentes. Neste caso, é necessário arbitrar um deles. Assim:

$$\text{Para } \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi + \psi = \text{atan2}(R_{21}, R_{11})$$

$$\text{Para } \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \phi - \psi = \text{atan2}(R_{21}, R_{11})$$

Ângulos de Euler ZYZ:

De forma análoga ao caso anterior, neste esquema, a orientação de {B} em relação a {A} é representada por três ângulos de rotação (ϕ, θ, ψ) , executados nessa ordem, respectivamente, em torno dos eixos z, y e z de um referencial móvel, inicialmente coincidente com {A} e alinhado com {B} após as três rotações. A matriz de rotação equivalente a (ϕ, θ, ψ) é dada por:

$$R_{\phi\theta\psi} = R(z, \phi).R(x, \theta).R(z, \psi)$$

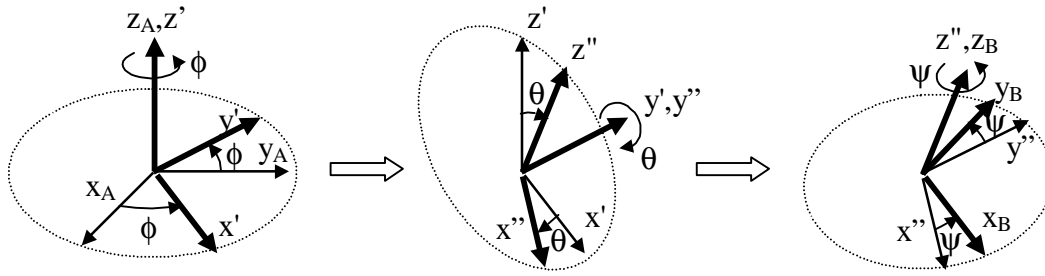


Figura 2.8. Ângulos de Euler ZYZ.

$$R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} (c\phi \cdot c\theta \cdot c\psi - s\phi \cdot s\psi) & (-c\phi \cdot c\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi) & (c\phi \cdot s\theta) \\ (s\phi \cdot c\theta \cdot c\psi + c\phi \cdot s\psi) & (-s\phi \cdot c\theta \cdot s\psi + c\phi \cdot c\psi) & (s\phi \cdot s\theta) \\ (-s\theta \cdot c\psi) & (s\theta \cdot s\psi) & (c\theta) \end{bmatrix}$$

Usando a mesma metodologia do caso anterior, é possível obter a relação inversa, que expressa os ângulos de Euler ZYZ em função de uma matriz de rotação equivalente:

$$\phi = \text{atan2}(R_{23}, R_{13}) \quad \theta = \text{atan2}(\pm[R_{31}^2 + R_{32}^2]^{1/2}, R_{33}) \quad \psi = \text{atan2}(R_{32}, -R_{31})$$

Novamente, dois conjuntos de ângulos de Euler satisfazem a solução. Tomando o sinal positivo da raiz quadrada, o que equivale a limitar θ ao intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, eliminamos esta ambigüidade. Da mesma forma do que no caso anterior, verifica-se também que, para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, a solução degenera (ocorre uma divisão por zero), o que resulta em infinitas soluções, as quais são devidas à ocorrência de duas rotações em torno do mesmo eixo. Assim:

$$\text{Para } \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi + \phi = \text{atan2}(R_{21}, R_{11})$$

$$\text{Para } \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \psi - \phi = \text{atan2}(R_{21}, -R_{11})$$

Ângulos de Euler ZYX:

De forma análoga aos casos anteriores, neste esquema, a orientação de {B} em relação a {A} é representada por três ângulos de rotação (ϕ , θ , ψ), executados nessa ordem, respectivamente, em torno dos eixos z, y e x de um referencial móvel, inicialmente coincidente com {A} e alinhado com {B} após as três rotações. A matriz de rotação equivalente a (ϕ , θ , ψ) é dada por:

$$R_{\phi\theta\psi} = R(z, \phi) \cdot R(x, \theta) \cdot R(z, \psi)$$

$$R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} (c\phi.c\theta) & (c\phi.s\theta.s\psi - s\phi.c\psi) & (c\phi.s\theta.c\psi + s\phi.s\psi) \\ (s\phi.c\theta) & (s\phi.s\theta.s\psi + c\phi.c\psi) & (s\phi.s\theta.c\psi - c\phi.s\psi) \\ (-s\theta) & (c\theta.s\psi) & (c\theta.c\psi) \end{bmatrix}$$

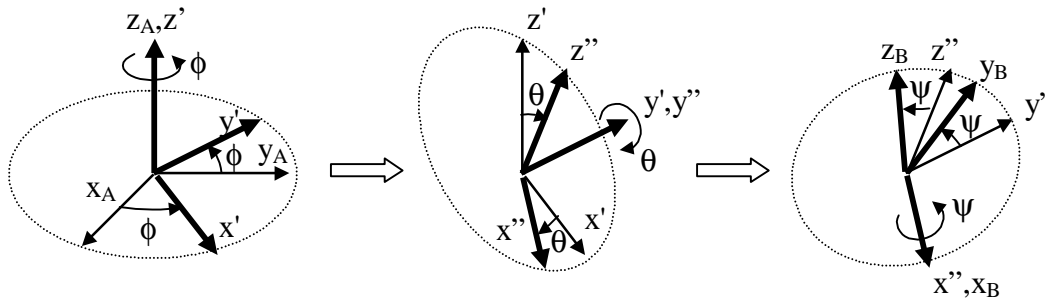


Figura 2.9. Ângulos de Euler ZYX.

Usando a mesma metodologia dos casos anteriores, é possível obter a relação inversa, que expressa os ângulos de Euler ZYX em função de uma matriz de rotação equivalente:

$$\phi = \text{atan2}(R_{21}, R_{11}) \quad \theta = \text{atan2}(-R_{31}, \pm[R_{32}^2 + R_{33}^2]^{1/2}) \quad \psi = \text{atan2}(R_{32}, R_{33})$$

Novamente, dois conjuntos de ângulos de Euler satisfazem a solução. Tomando o sinal positivo da raiz quadrada, o que equivale a limitar θ ao intervalo $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, eliminamos esta ambigüidade. Da forma semelhante aos casos anteriores, verifica-se também que, para $\theta = -\pi/2$ ou $\theta = \pi/2$, a solução degenera (ocorre uma divisão 0/0), o que resulta em infinitas soluções, as quais são devidas à ocorrência de duas rotações em torno do mesmo eixo. Assim:

$$\text{Para } \theta = -\pi/2 \Rightarrow \psi + \phi = \text{atan2}(-R_{12}, R_{22})$$

$$\text{Para } \theta = \pi/2 \Rightarrow (\psi - \phi) = \text{atan2}(R_{12}, R_{22})$$

Os ângulos de Euler ZYX são também chamados de ângulos de Rolamento, Lançamento e Guinada (*Roll, Pitch, Yaw*), termos derivados dos movimentos de rotação de naves ou aeronaves em torno dos seus eixos principais.

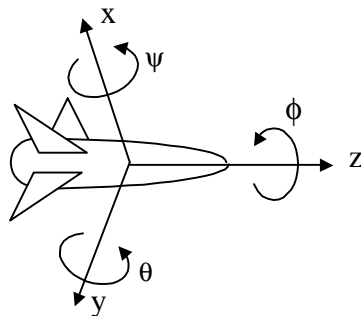


Figura 2.10. Ângulos de Rolamento, Lançamento e Guinada: ϕ , θ , ψ .

Representação equivalente Ângulo/Eixo :

Neste esquema, a orientação de {B} em relação a {A} é de forma redundante por meio de quatro parâmetros: as três componentes (k_x, k_y, k_z) de um eixo unitário direcional k e um ângulo de rotação θ em torno deste eixo. Observação: usando um eixo não unitário, o ângulo de giro θ pode ser codificado no módulo do vetor k , de modo a utilizar apenas três parâmetros (representação não redundante da orientação).

A matriz de rotação equivalente $R_{k\theta}$ pode ser obtida a partir de (k_x, k_y, k_z, θ) usando o seguinte procedimento:

- Alinhar o eixo k com o eixo z do referencial {A} através de duas rotações: giro de um ângulo α em torno do eixo x_A , seguido de um giro de um ângulo $-\beta$ em torno do eixo y_A .
- Girar um ângulo θ em torno do eixo z_A (que agora coincide com o eixo k).
- Retornar o eixo k ao seu alinhamento original revertendo as duas rotações iniciais: um giro de um ângulo β em torno do eixo y_A seguido de um giro de um ângulo α em torno do eixo x_A .

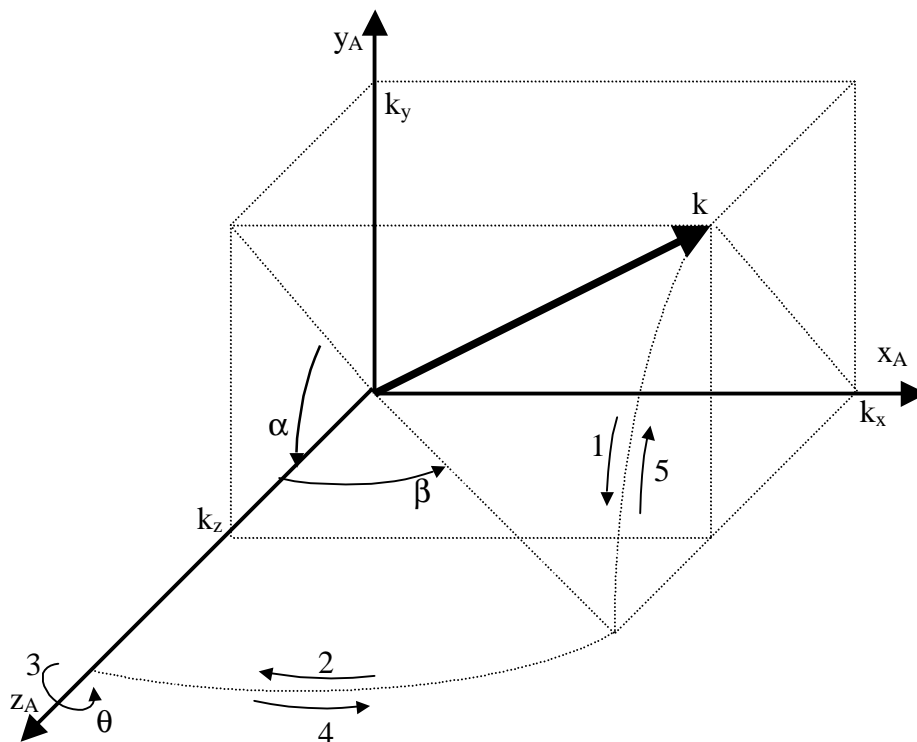


Figura 2.11. Rotação de um ângulo θ em torno de um eixo arbitrário k .

$$R_{k\theta} = R(x, -\alpha) \cdot R(y, \beta) \cdot R(z, \theta) \cdot R(y, -\beta) \cdot R(x, \alpha)$$

$$\Rightarrow R_{k\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & s\alpha \\ 0 & -s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ c\theta & s\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}$$

Definindo $v\theta = \text{vers}(\theta) = 1 - \cos(\theta)$ e substituindo os termos dependentes de α e β por:

$$s\alpha = k_y/[k_y^2 + k_z^2]^{1/2} \quad c\alpha = k_z/[k_y^2 + k_z^2]^{1/2} \quad s\beta = k_x \quad c\beta = [k_y^2 + k_z^2]^{1/2}$$

$$\Rightarrow R_{k\theta} = \begin{bmatrix} (k_x^2 \cdot v\theta + c\theta) & (k_x \cdot k_y \cdot v\theta - k_z \cdot s\theta) & (k_x \cdot k_z \cdot v\theta + k_y \cdot s\theta) \\ (k_x \cdot k_y \cdot v\theta + k_z \cdot s\theta) & (k_y^2 \cdot v\theta + c\theta) & (k_y \cdot k_z \cdot v\theta - k_x \cdot s\theta) \\ (k_x \cdot k_z \cdot v\theta - k_y \cdot s\theta) & (k_y \cdot k_z \cdot v\theta + k_x \cdot s\theta) & (k_z^2 \cdot v\theta + c\theta) \end{bmatrix}$$

A partir de relações entre elementos da matriz acima, é possível obter a representação ângulo-eixo equivalente à representação $R_{k\theta}$:

$$\theta = \cos^{-1}((R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1)/2)$$

$$k_x = (R_{32} - R_{23})/(2 \cdot s\theta)$$

$$k_y = (R_{13} - R_{31})/(2 \cdot s\theta)$$

$$k_z = (R_{21} - R_{12})/(2 \cdot s\theta)$$

A solução acima é válida $0 \leq \theta \leq \pi$. Para uma dada matriz $R_{k\theta}$, existem duas soluções possíveis: (k, θ) e $(-k, -\theta)$. Verifica-se também que, para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, a solução degenera (ocorre uma divisão por zero), o que resulta em infinitas soluções, (o eixo k torna-se indefinido). Assim, para pequenos ângulos, a solução é mal condicionada.

Exemplo: dados os referenciais $\{A\}$ e $\{B\}$ mostrados na figura abaixo, obtenha a matriz de rotação ${}^A R_B$ bem como a sua representação em ângulos de Euler ZYZ, ZYX e a representação equivalente ângulo/eixo.

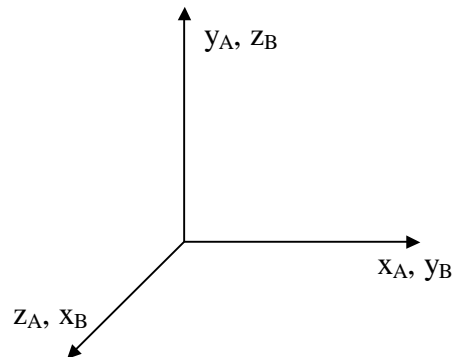


Figura 2.12. Exemplo de orientação relativa entre dois referenciais.

Expressando os eixos de $\{B\}$ em $\{A\}$, obtemos a sua orientação relativa:

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os ângulos de Euler ZYZ são dados por:

$$\phi = \text{atan2}(R_{13}, -R_{23}) = \text{atan2}(0, -1) = \pi$$

$$\theta = \text{atan2}([R_{31}^2 + R_{32}^2]^{1/2}, R_{33}) = \text{atan2}(1, 0) = \pi/2$$

$$\psi = \text{atan2}(R_{31}, R_{32}) = \pi/2$$

Os ângulos de Euler ZYZ são dados por:

$$\begin{aligned}\phi &= \text{atan2}(R_{23}, R_{13}) = \text{atan2}(1, 0) = \pi/2 \\ \theta &= \text{atan2}([R_{31}^2 + R_{32}^2]^{1/2}, R_{33}) = \text{atan2}(1, 0) = \pi/2 \\ \psi &= \text{atan2}(R_{32}, -R_{31}) = \text{atan2}(0, -1) = \pi\end{aligned}$$

Para o caso dos ângulos de Euler ZYX (*roll, pitch, yaw*), temos que ϕ é indefinido, pois $\phi = \text{atan2}(R_{21}, R_{11}) = \text{atan2}(0, 0)$. Neste caso, teremos infinitas soluções:

$$\begin{aligned}\theta &= \text{atan2}(-R_{31}, [R_{32}^2 + R_{33}^2]^{1/2}) \text{atan2}(-1, 0) = -\pi/2 \\ \psi + \phi &= \text{atan2}(-R_{12}, R_{22}) = \text{atan2}(-1, 0) = -\pi/2\end{aligned}$$

Para obter uma solução é necessário arbitrar um dos ângulos. Impondo o ângulo $\phi = 0$, temos que $\psi = -\pi/2$.

A representação equivalente Ângulo/Eixo é dada por:

$$\theta = \cos^{-1}((R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1)/2) = \cos^{-1}(-1/2) = 2\pi/3$$

$$\begin{aligned}k_x &= (R_{32} - R_{23})/(2.s\theta) = -(1/3)^{1/2} \\ k_y &= (R_{13} - R_{31})/(2.s\theta) = -(1/3)^{1/2} \\ k_z &= (R_{21} - R_{12})/(2.s\theta) = -(1/3)^{1/2}\end{aligned}$$

2.2. Transformações Homogêneas:

Mapeamentos:

Dados dois referenciais {A} e {B} e um ponto P, conhecendo as coordenadas ${}^B P$ do mesmo no referencial {B}, as coordenadas ${}^A P$ do mesmo no referencial {A} podem ser obtidas, desde que se conheça a posição ${}^A P_B$ e orientação ${}^A R_B$ de {B} em relação a {A}, através de um mapeamento de ${}^B P$ para ${}^A P$. A seguir, define-se {U} como um referencial universal.

Mapeamento de Translação:

Um mapeamento de translação caracteriza-se por mapear um ponto de um referencial {B} para um referencial {A}, onde {A} e {B} possuem origens diferentes mas orientações coincidentes (${}^U P_A \neq {}^U P_B$, ${}^U R_A = {}^U R_B$). Como {A} e {B} possuem a mesma orientação, as coordenadas de P em {A} podem ser expressas diretamente através de uma soma vetorial:

$${}^A P = {}^B P + {}^A P_B$$

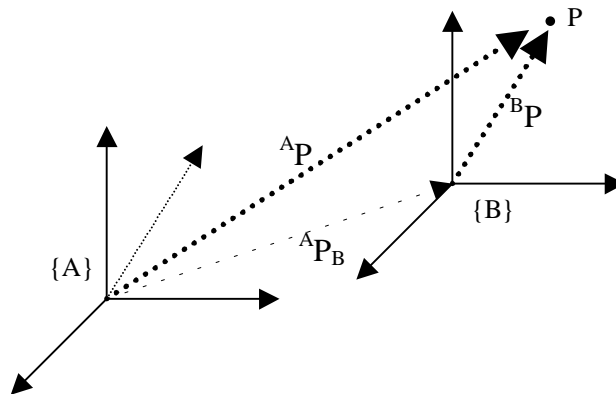


Figura 2.13. Mapeamento de Translação.

Mapeamento de Rotação:

Um mapeamento de rotação caracteriza-se por mapear um ponto de um referencial {B} para um referencial {A}, onde {A} e {B} possuem origens coincidentes mas orientações diferentes (${}^U P_A = {}^U P_B$, ${}^U R_A \neq {}^U R_B$). Como {A} e {B} possuem a mesma origem, as coordenadas de P em {A} podem ser expressas como a projeção de ${}^B P$ nos eixos de {A}:

$${}^A p_x = {}^B x_A \cdot {}^B P \quad {}^A p_y = {}^B y_A \cdot {}^B P \quad {}^A p_z = {}^B z_A \cdot {}^B P$$

ou, matricialmente,

$${}^A P = [{}^B x_A \cdot {}^B P \quad {}^B y_A \cdot {}^B P \quad {}^B z_A \cdot {}^B P]^T = [{}^B x_A \quad {}^B y_A \quad {}^B z_A]^T \cdot {}^B P \Rightarrow {}^A P = {}^B R_A \cdot {}^B P$$

Mas, como ${}^B R_A$ é uma matriz ortogonal, ${}^B R_A^T = {}^B R_A^{-1} = {}^A R_B$, assim, o mapeamento de rotação é definido por:

$${}^A P = {}^A R_B \cdot {}^B P$$

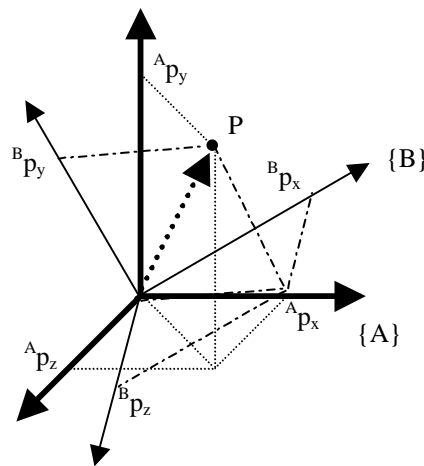


Figura 2.14. Mapeamento de Rotação.

Mapeamento Geral:

Quando os sistemas de referência $\{A\}$ e $\{B\}$ diferem tanto em posição como em orientação (${}^U P_A \neq {}^U P_B$, ${}^U R_A \neq {}^U R_B$), a representação de um ponto P em $\{A\}$ pode ser obtida a partir da sua representação em $\{B\}$ através do seguinte procedimento:

- Por meio de um mapeamento de rotação, obter a representação ${}^I P$ de P em relação a um referencial intermediário $\{I\}$, tal que este possua a mesma origem que $\{B\}$, mas esteja alinhado com o referencial $\{A\}$, (${}^U P_I = {}^U P_B$ e ${}^U R_I = {}^U R_A$).

$${}^I P = {}^I R_B \cdot {}^B P = {}^A R_B \cdot {}^B P$$

- Representar ${}^I P$ em $\{A\}$ através de um mapeamento de translação:

$${}^A P = {}^I P + {}^I P_B = {}^I P + {}^A P_B$$

$$\text{Assim: } {}^A P = {}^A R_B \cdot {}^B P + {}^A P_B$$

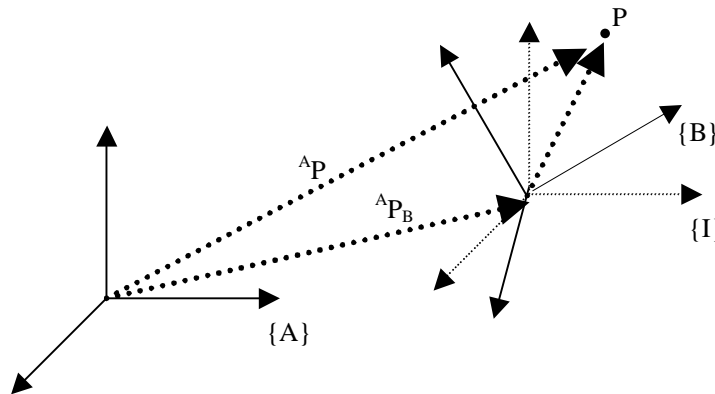


Figura 2.15. Mapeamento de Geral.

Transformação Homogênea:

O mapeamento geral pode ser representado matricialmente da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A P_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{onde: } \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A P_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^A T_B$$

${}^A T_B$ é a Matriz de Transformação Homogênea que representa de modo compacto a posição e orientação de $\{B\}$ em relação a $\{A\}$. A linha inferior da equação matricial foi acrescentada de modo a resultar numa matriz ${}^A T_B$ quadrada 4x4 para a qual exista matriz inversa. Os vetores de posição 4x1 (último elemento igual a 1) são vetores de coordenadas homogêneas. Doravante, para fins de simplificação, usaremos a nomenclatura ${}^A P$ tanto para vetores de posição 3x1, como para vetores em coordenadas homogêneas, sempre que o contexto torne obvio as suas dimensões.

Operadores de Movimento:

O movimento de um referencial em relação a outro pode ser descrito usando transformações homogêneas apropriadas que definam as mudanças de posição e orientação relativas ao se passar de um referencial para outro.

Operadores de Translação:

Dado um vetor ${}^A P_B$, o Operador de Translação $T({}^A P_B / |{}^A P_B|, |{}^A P_B|)$ aplicado sobre um vetor ${}^B P$ o translada uma distância $|{}^A P_B|$ ao longo da direção do vetor unitário ${}^A P_B / |{}^A P_B|$, resultando no vetor transladado ${}^A P$ (em coordenadas homogêneas):

$${}^A P = T({}^A P_B / |{}^A P_B|, |{}^A P_B|) \cdot {}^B P$$

onde, sendo I a matriz identidade 3x3:

$$T({}^A P_B / |{}^A P_B|, |{}^A P_B|) = \begin{bmatrix} I & {}^A P_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Outra maneira de abordar este problema é considerar o ponto ${}^B P$ fixo em relação ao referencial $\{B\}$, inicialmente coincidente com o referencial $\{A\}$. A seguir, deslocar a origem de $\{B\}$ até a posição ${}^A P_B$ relativa a $\{A\}$ através de um movimento de translação (mantendo a sua orientação paralela à orientação de $\{A\}$). Conseqüentemente, o ponto ${}^B P$ sofrerá também uma translação em relação ao referencial $\{A\}$, visto que ${}^B P$ é fixo em $\{B\}$. Conhecendo ${}^B P$ e o movimento de translação de $\{B\}$ em relação a $\{A\}$, (${}^A P_B$), o operador de translação permite obter a representação ${}^A P$ do ponto transladado em relação ao referencial $\{A\}$. Deste modo, em coordenadas cartesianas, temos:

$${}^A P = {}^B P + {}^A P_B$$

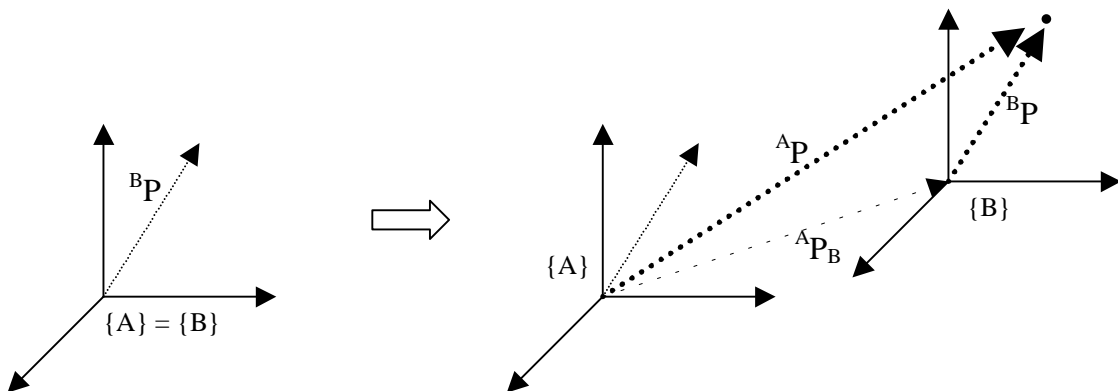


Figura 2.16. Operador de Translação.

Assim, os operadores de translação para um deslocamento linear d ao longo dos eixos x , y e z são dados respectivamente por:

$$T(x,d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(y,d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(z,d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operadores de Rotação:

Dado um vetor unitário k e um ângulo θ , o Operador de Rotação $R(k,\theta)$, quando aplicado sobre um vetor ${}^B P$, faz com que este gire o ângulo θ em torno do eixo k , resultando em um vetor rotacionado ${}^A P$, em coordenadas homogêneas:

$${}^A P = R(k,\theta) \cdot {}^B P$$

$$R(k,\theta) = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & {}^A R_B & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde ${}^A R_B$ é a matriz de rotação 3x3 equivalente à representação ângulo/eixo (k, θ) . Outra maneira de abordar este problema é considerar o ponto ${}^B P$ fixo em relação ao referencial $\{B\}$, inicialmente coincidente com o referencial $\{A\}$. A seguir, girar $\{B\}$ até a orientação ${}^A R_B$ relativa a $\{A\}$ através de um movimento de rotação θ em torno do eixo k , (mantendo a origem de $\{B\}$ coincidente com a origem de $\{A\}$). Conseqüentemente, o ponto ${}^B P$ sofrerá também uma rotação em relação ao referencial $\{A\}$, visto que ${}^B P$ é fixo em $\{B\}$. Conhecendo ${}^B P$ e o movimento de rotação de $\{B\}$ em relação a $\{A\}$, (${}^A R_B$), o operador de rotação permite obter a representação ${}^A P$ do ponto rotacionado em relação ao referencial $\{A\}$. Deste modo, em coordenadas cartesianas, temos:

$${}^A P = {}^A R_B \cdot {}^B P$$

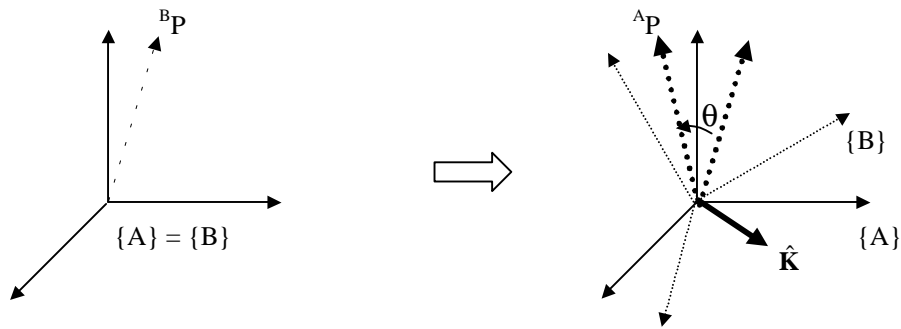


Figura 2.17. Operador de Rotação.

Assim, os operadores de rotação para um deslocamento angular θ em torno dos eixos x , y e z são dados respectivamente por:

$$R(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(y,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(z,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operadores de Transformação:

Um Operador de Transformação aplicado sobre um vetor ${}^B P$ resulta num vetor ${}^A P$ (em coordenadas homogêneas), movimentado para uma localização genérica em relação à sua localização inicial. Esta nova localização pode ser melhor descrita matematicamente como uma combinação de uma operação de rotação de um ângulo θ em torno do vetor unitário \hat{k} seguida de uma operação de translação por uma distância $|{}^A P_B|$ ao longo de um eixo unitário ${}^A P_B / |{}^A P_B|$.

Assim, em coordenadas cartesianas, a operação de transformação geral pode ser descrita matematicamente como:

$${}^A P = {}^A R_B \cdot {}^B P + {}^A P_B$$

Onde ${}^A R_B$ representa a matriz de rotação equivalente à rotação de um ângulo θ em torno do vetor \hat{k} . Então, o operador de transformação geral é dado por:

$${}^A T_B = T({}^A P_B / |{}^A P_B|, |{}^A P_B|).R(k, \theta) \Rightarrow {}^A T_B = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A P_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O operador de transformação ${}^A T_B$, aplicado a um ponto ${}^B P$ (em coordenadas homogêneas), resulta no ponto ${}^A P$ (também em coordenadas homogêneas):

$${}^A P = {}^A T_B \cdot {}^B P$$

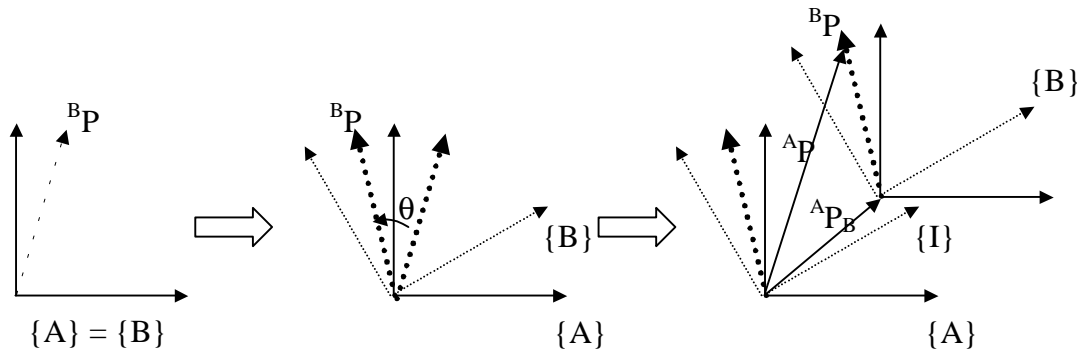


Figura 2.19. Operador de Transformação.

Exemplo: Dado o referencial $\{B\}$ rotacionado 45° em torno do eixo z_A e transladado a uma distância de duas unidades ao longo do eixo x_A do referencial $\{A\}$, determinar as coordenadas do ponto ${}^B P = [1 \ 1 \ 0]^T$ em relação ao referencial $\{A\}$.

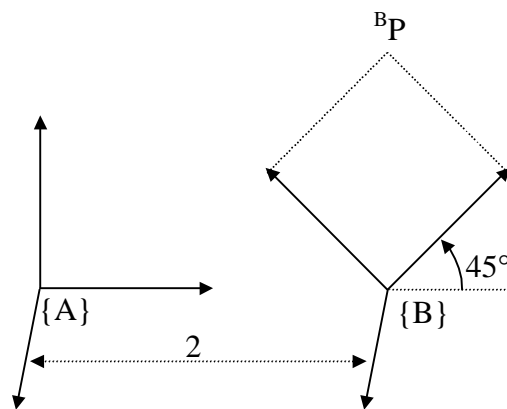


Figura 2.20. Exemplo de operador de transformação.

$${}^A P_B = [2 \ 0 \ 0]^T \quad {}^A R_B = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\text{sen}(45^\circ) & 0 \\ \text{sen}(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A P_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2)^{1/2} & -(1/2)^{1/2} & 0 & 2 \\ (1/2)^{1/2} & (1/2)^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^A P = [2 \ (1/2)^{1/2} \ 0]^T$$

Aritmética de Transformações:

Transformação Composta:

Problema: conhecendo a localização de {C} em relação a {B} e a localização de {B} em relação a {A}, determinar a localização de {C} em relação a {A}.

Solução: dado um ponto P representado em {A}, {B} e {C},

$${}^B P = {}^B T_C \cdot {}^C P, \quad {}^A P = {}^A T_B \cdot {}^B P, \quad {}^A P = {}^A T_C \cdot {}^C P$$

Então,

$${}^A P = {}^A T_B \cdot {}^B P = {}^A P = {}^A T_B \cdot ({}^B T_C \cdot {}^C P) = ({}^A T_B \cdot {}^B T_C) \cdot {}^C P \Rightarrow {}^A T_C = {}^A T_B \cdot {}^B T_C$$

$$\Rightarrow {}^A T_C = \begin{bmatrix} ({}^A R_B \cdot {}^B R_C) & ({}^A P_B + {}^A R_B \cdot {}^A P_C) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformação Inversa:

Problema: conhecendo a localização de {B} em relação a {A}, determinar a localização de {A} em relação a {B}.

Solução: dado um ponto P representado em {A} e {B},

$${}^A P = {}^A R_B \cdot {}^B P + {}^A P_B \Rightarrow {}^B P = {}^A R_B^{-1} \cdot ({}^A P - {}^A P_B) = {}^A R_B^T \cdot {}^A P - {}^A R_B^T \cdot {}^A P_B$$

Então, o operador matricial que relaciona ${}^A P$ a ${}^B P$ é:

$${}^B T_A = {}^A T_B^{-1} = \begin{bmatrix} ({}^A R_B^T) & (-{}^A R_B^T \cdot {}^A P_B) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equações de Transformação:

As transformações homogêneas permitem descrever a localização relativa de corpos rígidos. Muitos problemas de robótica envolvem a determinação da localização relativa entre dois referenciais a partir do conhecimento da localização relativa destes em relação a um terceiro referencial. Nestes casos, é possível estabelecer uma equação de transformações, a qual pode ser resolvida utilizando as regras aritméticas de composição e/ou inversão de transformações homogêneas. Assim, por exemplo, conhecendo ${}^A T_B$ e ${}^A T_C$, é possível obter ${}^B T_C$. Assim:

$${}^A T_C = {}^A T_B \cdot {}^B T_C \Rightarrow {}^B T_A \cdot {}^A T_C = {}^B T_A \cdot {}^A T_B \cdot {}^B T_C \Rightarrow ({}^A T_B)^{-1} \cdot {}^A T_C = ({}^A T_B)^{-1} \cdot {}^A T_B \cdot {}^B T_C$$

$$\Rightarrow {}^B T_C = ({}^A T_B)^{-1} \cdot {}^A T_C$$

Exemplo: seja a célula de trabalho mostrada na figura abaixo e dados os referenciais $\{B\}$ (Base), $\{G\}$ (Garra), $\{E\}$ (Estação) e $\{O\}$ (Objeto); determinar ${}^G T_O$ a partir das transformações homogêneas conhecidas ${}^B T_G$, ${}^B T_E$, ${}^E T_O$.

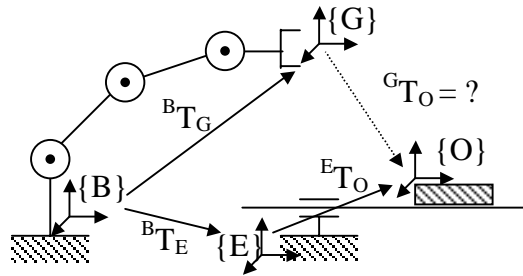


Figura 2.21. Exemplo de equação de transformação.

Solução: ${}^G T_O = {}^G T_B \cdot {}^B T_O = {}^G T_B \cdot ({}^B T_E \cdot {}^E T_O) = {}^B T_G^{-1} \cdot ({}^B T_E \cdot {}^E T_O)$

2.3. Cinemática Direta:

O Problema da Cinemática Direta:

Do ponto de vista cinemático, o robô manipulador pode ser considerado como um conjunto de corpos rígidos, (chamados *elos*), interligados numa cadeia cinemática aberta através de juntas, com uma extremidade fixa na base do manipulador e com uma garra ou ferramenta fixa na outra extremidade, que é livre.

Elo: corpo rígido que define a relação geométrica entre dois eixos de juntas vizinhas na cadeia cinemática. Para identificar elos usaremos números inteiros, de acordo com a seguinte convenção: a base do manipulador é o elo zero; os elos seguintes são numerados em ordem crescente na cadeia cinemática, da base até a ferramenta.

Junta: conexão entre dois elos vizinhos na cadeia cinemática. A partir do seu eixo se dá a movimentação relativa entre dois elos vizinhos. Para identificar juntas usaremos números inteiros, de acordo com a seguinte convenção: a junta mais próxima da base do manipulador é a junta 1; as juntas seguintes são numeradas em ordem crescente na cadeia cinemática, da base até a ferramenta.

Variável de Junta: grandeza que mede o deslocamento relativo entre dois elos vizinhos $\{i-1\}$ e $\{i\}$ interligados pela junta i . Para uma junta genérica i , utilizaremos a nomenclatura q_i para denotar a variável de junta associada. Se a junta i for rotacional, a variável da junta i é o ângulo de junta θ_i . Se a junta i for prismática, a variável da junta i é o deslocamento de junta d_i . Um robô de N graus de liberdade possui N variáveis de junta, que são representadas pelo vetor de variáveis de junta q de dimensão $N \times 1$.

O problema de Cinemática Direta de robôs manipuladores consiste em determinar a localização da garra (e eventualmente de cada elo do manipulador) a partir do valor atual das variáveis de junta (ângulos ou deslocamentos de junta). O problema da cinemática direta pode ser resolvido para qualquer robô manipulador serial utilizando transformações homogêneas que relacionam a localização de um elo em relação ao elo anterior na cadeia cinemática. A solução do problema da cinemática direta é única. Esta solução pode ser obtida em forma analítica fechada ou em forma numérica através de um procedimento sistemático.

A seguir, apresenta-se um método sistemático para solução do problema da cinemática direta de robôs manipuladores. Para esta solução é necessário caracterizar matematicamente os elos do robô através de referenciais e parâmetros cinemáticos atribuídos de acordo com convenções apropriadas. A notação Denavit-Hartenberg é uma destas convenções que permite solucionar o problema da cinemática direta de uma maneira simples e sistemática.

Notação Denavit Hartenberg:

Convenção para atribuição de Referenciais de Elo:

- Os elos são numerados partindo da base do robô, à qual associa-se o referencial $\{0\}$, e prosseguindo em ordem crescente na cadeia cinemática em direção à ferramenta.
- As juntas correspondentes são numeradas da mesma maneira, recebendo o mesmo número que o elo que, dentre os dois que são associados à mesma, seja o mais distante da base na cadeia cinemática.
- O eixo z_i do referencial do elo $\{i\}$ é coincidente com o eixo de movimento da junta i .
- A origem de $\{i\}$ é estabelecida na interseção entre o eixo z_i e a reta normal a z_i e z_{i+1} .
- O eixo x_i é estabelecido sobre a reta normal a z_i e z_{i+1} e apontando de z_i para z_{i+1} .
- O eixo y_i é definido pela regra da mão direita.

Casos especiais:

- O eixo z_i intersecta o eixo z_{i+1} : o eixo x_i é estabelecido sobre a reta normal ao plano formado por z_i e z_{i+1} , na direção do vetor $z_i \times z_{i+1}$.
- Extremidades da cadeia cinemática:
 - À base do robô é fixo um referencial $\{0\}$, que define arbitrariamente a localização do elo $\{1\}$ para a qual a variável da junta 1 é igual a zero.
 - O referencial $\{0\}$ é atribuído de maneira a ser coincidente com o referencial $\{1\}$ quando a variável da junta 1, q_1 , for igual a zero.
 - Ao último elo (no qual está fixa a ferramenta) são fixos dois referenciais: um na junta associada (referencial $\{N\}$) e outro na ponta da ferramenta $\{N+1\}$.
 - O referencial $\{N\}$ é atribuído de maneira a ser coincidente com o referencial de elo $\{N-1\}$ quando a variável da junta N , q_N , for igual a zero.
 - O referencial $\{N+1\}$ é posicionado na ponta da ferramenta e com a mesma orientação do referencial $\{N\}$.

Descrição Cinemática de Elos:

Comprimento do elo i : a_i , distância entre z_i e z_{i+1} medida ao longo do eixo x_i .

ângulo de torção do elo i : α_i , ângulo entre z_i e z_{i+1} medido em torno do eixo x_i .

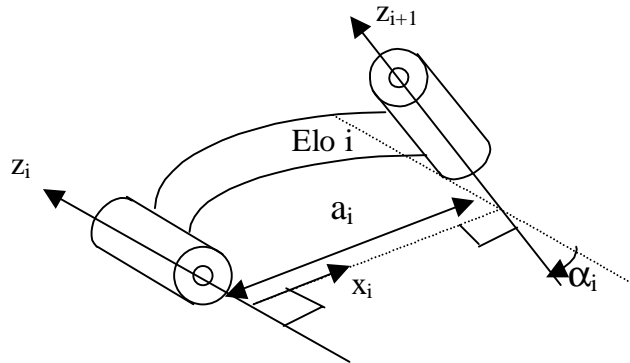


Figura 2.22. Parâmetros de elo.

Descrição Cinemática de Juntas:

Deslocamento da junta i : d_i , distância entre x_{i-1} e x_i medida ao longo do eixo z_i .

Ângulo da junta i : θ_i , ângulo entre x_{i-1} e x_i medido em torno do eixo z_i .

Variável da junta i : q_i , é igual ao ângulo da junta θ_i se a junta i for rotacional ou é igual ao deslocamento da junta d_i se a junta i for prismática. Grandeza que varia ao acionar o atuador da junta i , resultando no movimento relativo entre os elos $\{i-1\}$ e $\{i\}$.

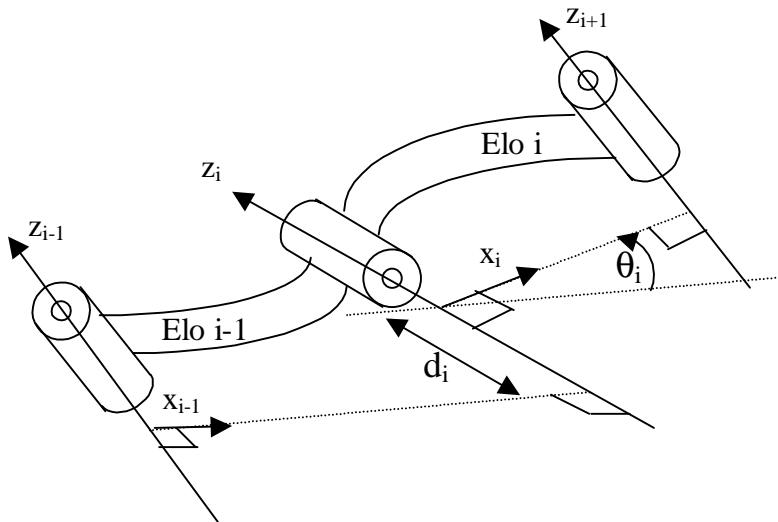


Figura 2.23. Parâmetros de junta.

Transformações de Elo:

De acordo com as convenções acima, a localização do referencial do elo $\{i\}$ em relação ao referencial do elo anterior $\{i-1\}$ pode ser obtida a partir de uma seqüência de translações e rotações ao longo dos eixos x_i e z_i : rotação θ_i em torno de z_i e translação d_i ao longo de z_i , seguidas de rotação α_{i-1} em torno de x_i e translação a_{i-1} ao longo de x_i .

$${}^{i-1}T_i = T(x_i, a_{i-1}) \cdot R(x_i, \alpha_{i-1}) \cdot T(z_i, d_i) \cdot R(z_i, \theta_i)$$

$$\Rightarrow {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}P_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c\theta_i) & (-s\theta_i) & 0 & (a_{i-1}) \\ (c\alpha_{i-1}s\theta_i) & (c\alpha_{i-1}c\theta_i) & (-s\alpha_{i-1}) & (-s\alpha_{i-1}d_i) \\ (s\alpha_{i-1}s\theta_i) & (s\alpha_{i-1}c\theta_i) & (c\alpha_{i-1}) & (c\alpha_{i-1}d_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde, $c\theta = \cos(\theta)$, $s\theta = \sin(\theta)$, $c\alpha = \cos(\alpha)$, $s\alpha = \sin(\alpha)$

Solução do Problema da Cinemática Direta:

Definidas as transformações de cada elo de um robô manipulador em função de da sua variável de junta associada, a solução do problema de cinemática direta é trivial, podendo ser obtida pela simples composição de transformações.

$${}^0T_N = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot \dots \cdot {}^{i-1}T_i \cdot \dots \cdot {}^{N-2}T_{N-1} \cdot {}^{N-1}T_N$$

Exemplo de cálculo de Cinemática Direta: dado o Manipulador Planar Articulado de três Graus de Liberdade mostrado na figura abaixo, obtenha a sua cinemática direta.

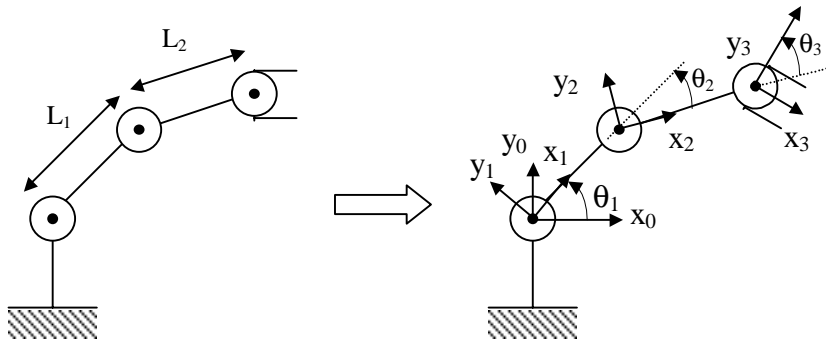


Figura 2.24. Exemplo de atribuição de referenciais para cálculo de Cinemática Direta.

Os eixos z_i são todos paralelos, alinhados com os eixos das juntas correspondentes e perpendiculares ao plano do robô. Os Parâmetros Denavit-Hartenberg são:

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	L_1	0	0	θ_2
3	L_2	0	0	θ_3

As transformações de elo são obtidas em função dos parâmetros Denavit-Hartenberg. Cada linha da tabela acima está associada a uma transformação de elo correspondente.

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^0T_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & (L_1c_1+L_2c_{12}) \\ s_{123} & c_{123} & 0 & (L_1s_1+L_2s_{12}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde, $c_1 = \cos(\theta_1)$, $s_1 = \sin(\theta_1)$, $c_{12} = \cos(\theta_1+\theta_2)$, $s_{12} = \sin(\theta_1+\theta_2)$, $c_{123} = \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$ e $s_{123} = \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$.

Exemplo de cálculo de Cinemática Direta: dado o Manipulador PUMA de seis Graus de Liberdade mostrado na figura abaixo, obtenha a sua cinemática direta.

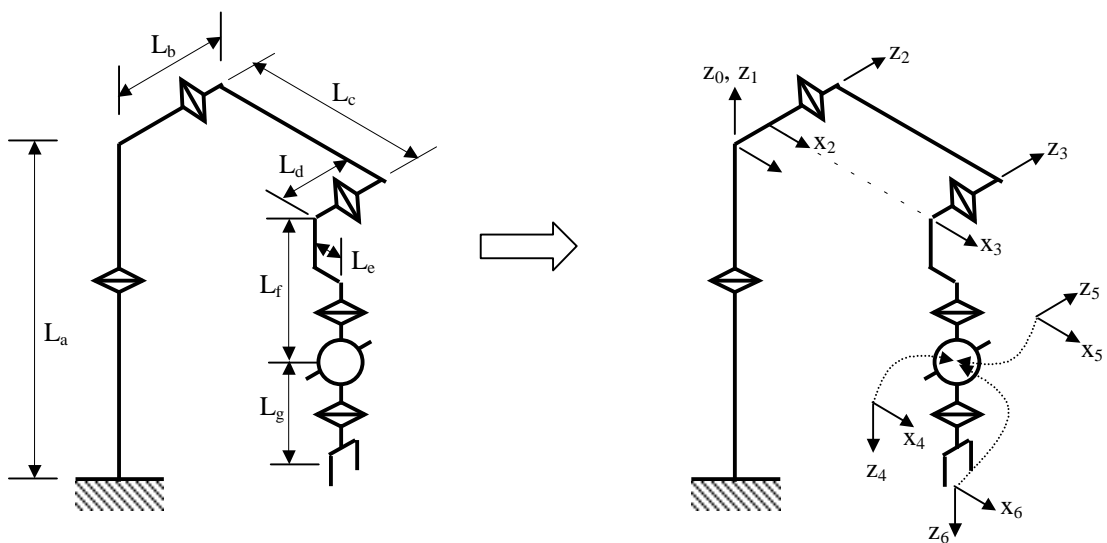


Figura 2.25. Atribuição de referenciais para um manipulador PUMA.

Os eixos z_i são todos paralelos, alinhados com os eixos das juntas correspondentes. Os Parâmetros Denavit-Hartenberg são:

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	$-\pi/2$	$L_b - L_d$	θ_2
3	L_c	0	0	θ_3
4	L_e	$-\pi/2$	L_f	θ_4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5
6	0	$-\pi/2$	0	θ_6

A partir dos parâmetros Denavit-Hartenberg, obtemos as transformações de elo:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_b - L_d \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_c \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3T_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & L_e \\ 0 & 0 & 1 & L_f \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir da composição das transformações de elo, a transformação de cinemática direta pode ser facilmente obtida. A matriz de orientação R e o vetor de posição correspondentes são dados por:

$$\begin{aligned} R_{11} &= c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + s_1[s_4c_5c_6 + c_4s_6] \\ R_{12} &= c_1[-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - s_1[s_4c_5s_6 - c_4c_6] \\ R_{13} &= -c_1[c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5] - s_1s_4s_5 \\ R_{21} &= s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1[s_4c_5c_6 + c_4s_6] \\ R_{22} &= s_1[-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + c_1[s_4c_5s_6 - c_4c_6] \\ R_{23} &= -s_1[c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5] + c_1s_4s_5 \\ R_{31} &= -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6 \\ R_{32} &= s_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_{23}s_5s_6 \\ R_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_x &= c_1(c_2L_c + c_{23}L_e - s_{23}L_f) - s_1(L_b - L_d) \\ P_y &= s_1(c_2L_c + c_{23}L_e - s_{23}L_f) + c_1(L_b - L_d) \\ P_z &= -s_2L_c - s_{23}L_e - c_{23}L_f \end{aligned}$$

2.4. Cinemática Inversa:

O Problema da Cinemática Inversa:

O Problema da Cinemática Inversa é fundamental no controle de robôs manipuladores. Normalmente, a tarefa é especificada em espaço cartesiano, enquanto que os controladores atuam sobre atuadores de junta, requerendo que as referências de controle sejam especificadas em espaço de juntas. Deste modo, torna-se necessário mapear referências especificadas em espaço cartesiano em referências equivalentes em espaço de juntas. Assim, o problema da cinemática inversa pode ser estabelecido da seguinte forma: especificada a localização (posição e orientação) que se deseja que a garra alcance, determinar o valor das variáveis de junta (ângulos ou deslocamentos de junta) necessários para levar a garra a tal localização. Ou seja, a partir da especificação de ${}^0T_N^*$, determinar o vetor de variáveis de junta q .

Características do Problema da Cinemática Inversa:

A localização da garra 0T_N é uma função não linear transcendente das N variáveis de junta (${}^0T_N^* = {}^0T_N(q)$). 0T_N possui 16 elementos (quatro deles triviais) sendo que os nove elementos da matriz de rotação estão sujeitos a seis restrições. Assim, têm-se ao todo seis equações linearmente independentes que devem ser resolvidas para as variáveis de junta. Ao contrário da cinemática direta, o problema da cinemática inversa não é trivial e tem um complicador adicional: o mapeamento ${}^0T_N \rightarrow q$ não é um mapeamento um-para-um. Assim, dois problemas adicionais devem ser levados em conta: a verificação da existência de solução e a possibilidade de existirem múltiplas ou infinitas soluções para uma dada localização da garra.

Existência de soluções:

- Espaço de trabalho: conjunto de todas as localizações da ferramenta para as quais existe solução para a cinemática inversa. Podem existir especificações para ${}^0T_N^*$ para as quais não existe solução \Rightarrow fora do espaço de trabalho.
- Espaço de trabalho alcançável: Volume do espaço que pode ser alcançado com, pelo menos uma orientação.
- Espaço de trabalho manipulável: Volume do espaço de trabalho que pode ser alcançado em qualquer orientação.

Múltiplas Soluções:

- Para $N = 6$ juntas \Rightarrow 6 equações e 6 incógnitas. Para uma localização especificada dentro do espaço de trabalho existe um número finito de soluções. Até 16 soluções diferentes podem existir.
- Para $N < 6$ juntas \Rightarrow 6 equações e $N < 6$ incógnitas. Não é possível alcançar objetivos gerais no espaço 3D. As localizações para as quais existe solução da cinemática inversa constituem um subespaço do espaço 3D.
- Para $N > 6$ juntas \Rightarrow 6 equações e $N > 6$ incógnitas (manipuladores redundantes). Para uma dada especificação de localização podem existir infinitas soluções para o problema da cinemática inversa. É necessário escolher uma solução dentro do conjunto de possíveis soluções. Deve-se definir algum critério de escolha, como por exemplo: menor movimento em relação à localização atual, movimento das juntas mais leves, contorno de obstáculos, etc.

Métodos de Solução:

Solução Numérica:

As equações não lineares simultâneas podem ser resolvidas por métodos iterativos. Por utilizar métodos iterativos, esquemas baseados neste tipo de abordagem podem ter problemas de convergência. Por esta razão, não são muito apropriados para implementações em tempo real.

Solução em fórmula fechada:

As equações são resolvidas por métodos algébricos, freqüentemente fazendo uso de considerações geométricas, resultando numa expressão analítica computável. Este tipo de abordagem resulta em soluções fáceis de implementar e que envolvem pouco esforço computacional, encorajando aplicações em tempo real. Como a cinemática inversa deve ser calculada a taxas elevadas (período de amostragem menor do que 30 ms), soluções fechadas são mais adequadas.

Robôs manipuladores de seis graus de liberdade e com três eixos se intersectando num ponto possuem solução em fórmula fechada (Solução de Pieper). A grande maioria dos manipuladores industriais é projetada e construída de modo a possuir solução em fórmula fechada.

Uma técnica freqüentemente utilizada na obtenção de uma solução fechada consiste em transformar a equação cinemática de modo a obter uma representação equivalente mais simples. A equação cinemática original:

$${}^0T_6^* = {}^0T_1(q_1) \cdot {}^1T_2(q_2) \cdot \dots \cdot {}^5T_6(q_6)$$

é equivalente a doze equações algébricas, com seis variáveis desconhecidas ($q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$). Transformando esta expressão:

$$[{}^0T_1(q_1) \cdot \dots \cdot {}^{i-1}T_i(q_i)]^{-1} \cdot {}^0T_6^* \cdot [{}^jT_{j+1}(q_{j+1}) \cdot \dots \cdot {}^5T_6(q_6)]^{-1} = {}^iT_{i+1}(q_{i+1}) \cdot \dots \cdot {}^{j-1}T_j(q_j)$$

obtemos outro conjunto equivalente de doze equações simultâneas para cada par (i, j) com $i < j$. Escolhendo as equações mais simples dentro deste conjunto, freqüentemente é possível encontrar mais facilmente a solução.

A solução proposta por Pieper para manipuladores de seis graus de liberdade baseia-se em uma aplicação particular desta abordagem. Grande parte dos robôs manipuladores industriais possuem punho com três juntas rotacionais cujos eixos se intersectam em um ponto comum. Neste caso, a origem dos referenciais {4}, {5} e {6} está localizada neste ponto. A especificação da posição e orientação da garra determina a posição da origem de {6}. A orientação da garra pode ser especificada de diversas maneiras (matriz de rotação, ângulos de Euler, etc.). Em particular, se esta for especificada através de um vetor de aproximação, com o ângulo de rolamento codificado em seu módulo, a origem de {6} estará localizada sobre o mesmo. Conhecendo a posição de {6}, determina-se conseqüentemente a posição de {4}, visto que suas origens são coincidentes. Esta última é representada por três componentes ${}^0P_{4x}, {}^0P_{4y}, {}^0P_{4z}$, função das três primeiras variáveis de junta: q_1, q_2 e q_3 . Assim, utilizando métodos algébricos e/ou geométricos, é possível determinar q_1, q_2 e q_3 a partir da posição e orientação especificada para a ferramenta. A partir de q_1, q_2 e q_3 , é possível

determinar a posição e orientação de {3}, bem como a orientação de {6} relativa a {3} (por transformação da equação cinemática). Como esta última orientação é função apenas de q_4 , q_5 e q_6 , estas três últimas variáveis desconhecidas podem ser obtidas facilmente da equação transformada.

Exemplo de cálculo de Cinemática Inversa:

Resolva o problema da cinemática inversa para o Manipulador Planar Articulado de três Graus de Liberdade.

Considere a posição e orientação da garra especificada por três valores: (x, y, ϕ) , onde (x, y) são respectivamente as coordenadas x e y da origem do referencial da garra {3} expressas no referencial de base {0} e ϕ é o ângulo de orientação do referencial {3} em relação ao referencial {0}, que corresponde a uma rotação de ϕ radianos em torno do eixo \hat{z}_0 . Esta especificação de localização pode ser expressa em forma de uma matriz de transformação homogênea ${}^0T_3^*$, a qual é igualada à expressão da cinemática direta 0T_3 , função das variáveis de junta:

$$\Rightarrow {}^0T_3^* = {}^0T_3 = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 & x \\ s\phi & c\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & (L_1c_1+L_2c_{12}) \\ s_{123} & c_{123} & 0 & (L_1s_1+L_2s_{12}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da equação matricial acima podemos obter quatro equações, função dos ângulos de junta, das quais, as duas são dependentes entre si:

$$\begin{aligned} c_\phi &= c_{123} \\ s_\phi &= s_{123} \\ x &= L_1c_1+L_2c_{12} \\ y &= L_1s_1+L_2s_{12} \end{aligned}$$

Por meios algébricos, estas equações podem ser resolvidas para θ_1 , θ_2 e θ_3 :

$$\theta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2)$$

$$\text{onde, } c_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \quad s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$$

$\text{atan2}(s,c)$ é a função arcotangente definida para quatro quadrantes, onde os parâmetros de entrada s e c representam respectivamente o seno e o coseno do arco a ser calculado.

$$\theta_1 = \text{atan2}(y, x) - \text{atan2}(L_2.s_2, L_1+L_2.c_2)$$

$$\phi = \text{atan2}(s_{123}, c_{123})$$

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$

Observações:

- a) Existência de solução: a expressão obtida deve obedecer à restrição $-1 \leq c_2 \leq 1$.
- b) Solução singular: se $x = y = 0$, a solução para θ_1 pode assumir qualquer valor.
- c) Múltiplas soluções: de acordo com o sinal escolhido para s_2 , duas soluções são possíveis, com o braço para cima e com o braço para baixo.

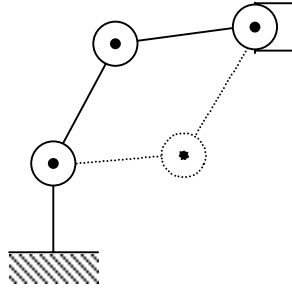


Figura 2.26. Exemplo de múltiplas soluções no problema de Cinemática Inversa.

Exemplo de cálculo de Cinemática Inversa para manipulador PUMA :

Considerando as forma fechada da cinemática direta do robô manipulador PUMA e levando em conta que as três juntas distais possuem eixos que se intersectam em um único ponto, a cinemática inversa pode ser obtida usando a abordagem de Pieper. Por procedimentos algébricos, as três primeiras variáveis de junta podem ser obtidas a partir da posição da garra P_x , P_y e P_z :

$$\theta_1 = \text{atan2}(-p_x, p_y) \pm \text{atan2}([P_x^2 + P_y^2 - (L_b - L_d)^2]^{1/2}, [L_b - L_d])$$

$$\theta_3 = \text{atan2}(-L_f, L_e) \pm \text{atan2}([L_c^2 (L_e^2 + L_f^2) - K_a^2]^{1/2}, K_a)$$

$$\text{onde: } K_a = [P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - L_c^2 - L_e^2 - L_f^2 - (L_b - L_d)^2] / 2$$

$$\theta_2 = \text{atan2}(K_b, K_c)$$

onde:

$$K_b = -(L_e s_3 + L_f c_3)(c_1 P_x + s_1 P_y) - (L_e c_3 - L_f s_3 + L_c) P_z$$

$$K_c = (L_e c_3 - L_f s_3 + L_c)(c_1 P_x + s_1 P_y) - (L_e s_3 + L_f c_3) P_z$$

A partir dos valores já calculados de θ_1 , θ_2 e θ_3 , podemos transformar a equação cinemática, de modo a obter equações em θ_4 , θ_5 e θ_6 :

$$[{}^0T_3]^{-1} \cdot {}^0T_6 = {}^3T_4(\theta_4) \cdot {}^4T_5(\theta_5) \cdot {}^5T_6(\theta_6).$$

Denotando os elementos da componente de orientação 3R_6 de 3T_6 por r_{ij} , com $i, j = 1, 2, 3$:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) & (-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) & (-c_4 s_5) \\ (s_5 c_6) & (-s_5 s_6) & (c_5) \\ (-s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6) & (s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6) & (s_4 s_5) \end{bmatrix}$$

A partir da expressão acima, podemos facilmente obter θ_4 , θ_5 e θ_6 . Quando $r_{13} = r_{33} \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}\theta_4 &= \text{atan2}(r_{33}, -r_{13}) \\ \theta_5 &= \text{atan2}(\pm[r_{13}^2 + r_{33}^2]^{1/2}, r_{23}) \\ \theta_6 &= \text{atan2}(-r_{22}, r_{21})\end{aligned}$$

Quando $r_{13} = r_{33} = 0$, significa que $s_5 = 0$, ou seja, $c_5 = r_{23} = \pm 1$. Assim:

$$\begin{aligned}\theta_4 &= \text{arbitrário.} \\ \theta_5 &= (1 - r_{23}) \pi/2 \\ \theta_6 &= \text{atan2}(-r_{31}, -r_{32}) - r_{32} \cdot \theta_4\end{aligned}$$

Portanto, existem até oito possíveis soluções para o problema da cinemática inversa: dois possíveis valores para θ_1 , combinados a dois possíveis valores para θ_3 e a dois possíveis valores para θ_5 .

Métodos de Solução para manipuladores com menos de seis juntas:

Quando um robô manipulador possui menos do que seis graus de liberdade, o seu espaço de trabalho é um subconjunto (subespaço) do espaço definido por todas as possíveis posições e orientações no espaço tridimensional. Este subespaço possui dimensão igual ao número de graus de liberdade do robô manipulador.

Exemplo: dado o robô manipulador polar mostrado na figura abaixo, determine o seu subespaço de trabalho.

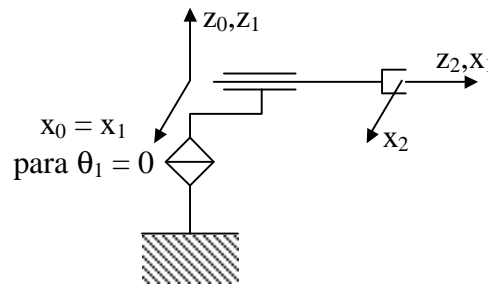


Figura 2.27. Manipulador com duas juntas gera um subespaço de trabalho.

A posição da garra no plano horizontal é específica como:

$${}^0P_2 = [x \ y \ 0]^T$$

Devido a que o braço tem apenas duas juntas, a orientação da ferramenta em relação à base não pode ser imposta de forma independente, mas é dependente da posição:

$${}^0R_2 = [{}^0x_2 \ {}^0y_2 \ {}^0z_2] = \begin{bmatrix} (y/[x^2+y^2]^{1/2}) & 0 & (x/[x^2+y^2]^{1/2}) \\ (-x/[x^2+y^2]^{1/2}) & 0 & (y/[x^2+y^2]^{1/2}) \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A localização dada por 0R_2 e 0P_2 define um subespaço no qual a orientação da garra não é independente da sua posição, mas função de x e y . Desta maneira, para um número de juntas N menor do que seis, nem sempre é possível alcançar objetivos gerais de posição e orientação. Neste caso, quando a localização especificada para a garra ${}^0T_N^*$ está fora do subespaço alcançável pelo robô, o que se pode fazer é definir um novo objetivo ${}^0T_N'$ dentro do subespaço, o mais próximo possível da especificação inicial. Alguma métrica deve ser utilizada para definir o que se entende por “o mais próximo possível”. A partir da nova especificação ${}^0T_N'$ é possível então encontrar as variáveis de junta correspondentes através do mapeamento de cinemática inversa.